И. В. Бойков

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ И ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Часть первая

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Издательство
Пензенского государственного
университета

Пенза 2005

.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория квадратурных и кубатурных формул является активно развивающимся направлением в современной математике. Этой теории и ее численным реализациям посвящено большое число статей и ряд монографий. От имеющихся монографий данная книга отличается тем, что в основном посвящена построению оптимальных по точности (асимптотически оптимальных или оптимальных по порядку) алгоритмов вычисления сингулярных интегралов в смысле главного значения по Коши, полисингулярных интегралов, многомерных сингулярных интегралов, а также построению оптимальных по точности алгоритмов вычисления одномерных гиперсингулярных интегралов, полигиперсингулярных интегралов, многомерных гиперсингулярных интегралов. Построение этих алгоритмов основано на восходящей к П.Л.Чебышеву минимаксной концепции оптимальности, гарантирующей получение наилучших результатов при наихудшей на взятом классе исходной информации.

Монография состоит из двух частей. Первая часть посвящена оптимальным методам вычисления сингулярных интегралов, вторая — оптимальным методам вычисления гиперсингулярных интегралов. Основное внимание во второй части уделяется гиперсингулярным интегралам в смысле Адамара.

Первая часть состоит из семи глав. В первой главе дается обзор приближенных методов вычисления сингулярных интегралов, приводится постановка задачи оптимизации, описываются классы функций, для которых строятся оптимальные алгоритмы.

Вторая глава посвящена оптимальным алгоритмам вычисления сингулярных интегралов с фиксированной сингулярностью.

В третьей главе излагаются оптимальные алгоритмы вычисления сингулярных интегралов с ядрами Гильберта и Коши.

В четвертой главе исследуются методы построения оптимальных кубатурных формул вычисления многомерных слабосингулярных интегралов, полисингулярных интегралов с ядрами Гильберта и Коши и многомерных сингулярных интегралов.

В пятой главе исследуются адаптивные методы вычисления сингулярных интегралов.

В шестой главе рассматриваются оптимальные по сложности алгоритмы вычисления одномерных и многомерных сингулярных интегралов.

Седьмая глава посвящена применению оптимальных кубатурных формул вычисления многомерных слабосингулярных интегралов к приближенному вычислению электрической емкости пространственных тел произвольной формы.

Книга, в первую очередь, адресована специалистам в области вычислительной математики и механики. Она также может быть полезна физикам и инженерам-исследователям, которые в своих предметных областях сталкиваются с необходимостью вычисления сингулярных интегралов. Отдельные параграфы книги могут быть использованы в качестве учебного пособия по дисциплинам "Квадратурные формулы"и "Граничные интегральные уравнения"для студентов специальности "Прикладная математика".

Исследования автора по приближенным методам вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов были поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 94-01-00653, 97-01-00621), Министерством образования РФ (гранты по вычислительной математике 1994 – 1996 гг. и 1998 – 2000 гг.), Федеральным агенством по образованию (2005 г., регистрационный номер 0120.0502705).

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ

1. Постановка задачи оптимизации

В этом параграфе приведены определения оптимальных по точности и сложности пассивных алгоритмов вычисления сингулярных интегралов. Определения оптимальных по точности пассивных алгоритмов вычисления гиперсингулярных интегралов даны во второй части.

Предварительно напомним определения сингулярных интегралов в смысле главного значения по Коши, полисингулярных интегралов и многомерных сингулярных интегралов.

Рассмотрим интеграл

$$J\varphi = \int\limits_a^b \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad a < t < b. \tag{1.1}$$

Известно, что этот интеграл не берется ни в смысле Римана, ни в смысле Лебега. Для того, чтобы придать интегралу (1.1) смысл, Коши ввел новый тип интегралов (так называемые интегралы в смысле главного значения по Коши). Исторически интегралы в смысле главного значения по Коши являются одним из первых методов регуляризации расходящихся интегралов. Подробнее об этом см. в [2], [64].

Определение 1.1. Главным значением по Коши особого интеграла $\int\limits_a^b \frac{f(\tau)}{\tau - c} d\tau, \quad a < c < b$, называется предел

$$\lim_{\eta \to 0} \left[\int\limits_a^{c-\eta} \frac{f(\tau)}{\tau - c} d\tau + \int\limits_{c+\eta}^b \frac{f(\tau)}{\tau - c} d\tau \right].$$

Покажем, что если функция $f(t)$ на сегменте $[a, b]$ удовлетворяет условию Гельдера $H_\alpha(A)$ с показателем α $(0 < \alpha \leq 1)$ и коэффициентом A, т.е. если $|f(x_1) - f(x_2)| \leq A|x_1 - x_2|^\alpha$, то существует интеграл $\int\limits_a^b \frac{f(\tau)}{\tau - c} d\tau, \quad a < c < b$.

В самом деле, из определения интеграла в смысле главного значения по Коши следует его однородность и аддитивность. Поэтому

$$\int\limits_a^b \frac{f(\tau)}{\tau - c} d\tau = \int\limits_a^b \frac{f(\tau) - f(c)}{\tau - c} d\tau + f(c) \int\limits_a^b \frac{d\tau}{\tau - c}. \tag{1.2}$$

Первый из интегралов в правой части предыдущего равенства есть несобственный интеграл Римана. Это следует из неравенства $|f(\tau) - f(c)|/|\tau - c| \leq A|\tau - c|^{\alpha}/|\tau - c| \leq A/|\tau - c|^{1-\alpha}$ и критерия Коши существования несобственных интегралов [155]. Второй интеграл из правой части равенства (1.2) по определению равен

$$\int\limits_a^b \frac{f(\tau)}{\tau - c} d\tau = \ln \left| \frac{b - c}{a - c} \right|.$$

Равенство (1.2) широко используется при оценке квадратурных формул.

Определим теперь главное значение по Коши особого интеграла на криволинейном контуре.

Рассмотрим интеграл

$$Jf = \int\limits_L \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in L,$$

где $L-$ гладкая кривая в плоскости комплексной переменной z;
t не совпадает с концами контура L.

Проведем из точки t контура как из центра окружность радиуса r и пусть t_1, t_2 — точки пересечения этой окружности с кривой L. Радиус r будем считать настолько малым, чтобы окружность не имела с контуром L других точек пересечения кроме t_1 и t_2. Обозначим часть контура L, вырезанного окружностью, через l и возьмем интеграл по оставшейся дуге

$$\int\limits_{L \setminus l} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

Определение 1.2 [63]. Предел интеграла $\int\limits_{L \setminus l} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau$ при $r \to 0$ назы-

вается главным значением особого интеграла

$$\int\limits_L \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

Напомним, следуя [63], определение полисингулярных интегралов. При этом для простоты обозначений ограничимся рассмотрением бисингулярных интегралов.

Пусть в области комплексной переменной $z_k, k = 1, 2$, дан простой, гладкий, замкнутый контур γ_k, делящий ее на две части: внутреннюю $-D_k^+$ и внешнюю $-D_k^-$. Граница этих областей определяется формулой $\gamma = \gamma_1 \times \gamma_2$ и называется остовом. Пусть на остове γ задана функция $\varphi(t_1, t_2)$.

Рассмотрим интеграл

$$B\varphi = \int\limits_{\gamma_1} \int\limits_{\gamma_2} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)}, \quad t_i \in \gamma_i, i = 1, 2.$$

Для определения этого интеграла предлагается следующая процедура.

В плоскости $z_i \in \gamma_i, i = 1, 2$, опишем окружность с центром в точке $t_i, i = 1, 2$, и столь малого радиуса $\rho, \rho \leq \epsilon$, что она пересекает контур $\gamma_i, i = 1, 2$, только в двух точках. Часть контура $\gamma_i, i = 1, 2$, лежащую внутри этой окружности, обозначим через $\gamma_i^*, i = 1, 2$. Через $\gamma*$ обозначим топологическое произведение $\gamma* = \gamma_1^* \times \gamma_2^*$.

Определение 1.3. Бисингулярный интеграл $B\varphi$ определяется как предел

$$B\varphi = \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{\gamma_1 \setminus \gamma_1^*} \int\limits_{\gamma_2 \setminus \gamma_2^*} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)}, \quad t_i \in \gamma_i, i = 1, 2.$$

Некоторые классы функций, при которых существует этот предел, указаны в монографии [63].

Приведем определение многомерных сингулярных интегралов, причем, как и выше, ограничимся для простоты обозначений двумерным случаем. Введем следующие обозначения. Через E_2 обозначим двумерное евклидово пространство, $t = (t_1, t_2), \tau = (\tau_1, \tau_2)-$ точки этого пространства, $r(t, \tau) = ((t_1 - \tau_1)^2 + (t_2 - \tau_2)^2)^{1/2}, \theta = (\frac{t_1 - \tau_1}{r(t,\tau)}, \frac{t_2 - \tau_2}{r(t,\tau)})$. Нетрудно

видеть, что точка θ пробегает окружность радиуса единица с центром в точке t.

Пусть $\bar{\Omega}-$ область в E_2. Область $\bar{\Omega}$ может быть как конечной, так и бесконечной.

Определение 1.4 [106]. Многомерный сингулярный интеграл

$$M\varphi = \int\limits_{\bar{\Omega}} \frac{f(\theta, t, \tau)\varphi(\tau)}{r^2(t, \tau)} d\tau_1 d\tau_2, t \in \Omega$$

определяется формулой

$$M\varphi = \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{\bar{\Omega} \setminus S(t,\epsilon)} \frac{f(\theta, t, \tau)\varphi(\tau)}{r^2(t, \tau)} d\tau_1 d\tau_2, t \in \Omega,$$

где $S(t, \epsilon)-$ круг радиуса ϵ с центром в точке t.

Вопросы существования многомерных сингулярных интегралов подробно исследованы в [106].

Постановка задачи построения наилучшей квадратурной формулы (к.ф.) принадлежит А. Н. Колмогорову и заключается в следующем. Пусть Ψ некоторый класс интегрируемых на сегменте [0,1] функций. Рассмотрим к.ф.:

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) + R_n(f, p_i, x_i), \tag{1.3}$$

где коэффициенты p_i и узлы $0 \leq x_1 < \cdots < x_n \leq 1$ произвольны. Погрешность к.ф. (1.3) на классе функций Ψ равна

$$R_n(\Psi, p_i, x_i) = \sup_{f \in \Psi} |R_n(f, p_i, x_i)|.$$

Введем величину $\zeta_n[\Psi] = \inf\limits_{p_i, x_i} R_n(\Psi, p_i, x_i)$. Если существуют коэффициенты p_i^* и узлы $x_i^*(i = 1, 2, \ldots, n)$, при которых $\zeta_n(\Psi) =$
$= R_n(\Psi, p_i^*, x_i^*)$, то к.ф. (1.3) с весами p_i^* и узлами x_i^* называется наилучшей (или оптимальной) на классе Ψ.

Н.С.Бахваловым введены [14] понятия асимптотически оптимальных и оптимальных по порядку пассивных алгоритмов решения задач численного анализа. Другие подходы к определению оптимальных пассивных алгоритмов предложены в книгах [143], [145], [150].

Следуя [14], к.ф. (1.3) с весами p_i^* и узлами x_i^* назовем асимптотически оптимальной или оптимальной по порядку на классе Ψ, если $R_n(\Psi, p_i^*, x_i^*) \sim \zeta_n(\Psi)$ или $R_n(\Psi, p_i^*, x_i^*) \asymp \zeta_n(\Psi)$ (напомним, что $\alpha_n \sim \beta_n$ означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n/\beta_n) = 1$, а $\alpha_n \asymp \beta_n$ означает, что $A \le (\alpha_n/\beta_n) \le B$, где A, B=const, $0 < A, B < \infty$).

Перейдем к определению оптимальных алгоритмов вычисления сингулярных интегралов. Следует различать постановку задачи вычисления сингулярных интегралов в случае фиксированной и переменной сингулярности.

В первом случае, ограничиваясь интегралом $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau}$ находим, что задача построения наилучшей к.ф. для сингулярного интеграла с фиксированной особенностью совпадает с аналогичной задачей для интеграла в смысле Римана.

Во втором случае ограничимся интегралом с ядром Гильберта

$$F\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s}{2}d\sigma,$$

в котором параметр s принимает любые значения, принадлежащие сегменту $[0, 2\pi]$.

Этот интеграл будем вычислять по к.ф.

$$F\varphi = \sum_{k=1}^{n} p_k(s)\varphi(t_k) + R_n(s, p_k, t_k, \varphi) \tag{1.4}$$

с произвольными весами $p_k(s)$ и узлами $t_k(0 \le t_k \le 2\pi)$. Под погрешностью к.ф. (1.4) будем понимать величину

$$R_n(p_k, t_k, \varphi) = \max_s |R_n(s, p_k(s), t_k, \varphi)|.$$

Отметим, что если из контекста ясно, о каком векторе узлов и весов идет речь, то вместо обозначений $R_n(s, p_k, t_k, \varphi)$ и $R_n(p_k, t_k, \varphi)$ будем писать соответственно $R_n(s, \varphi)$ и $R_n(\varphi)$.

Если $\Psi-$ некоторый класс заданных на сегменте $[0, 2\pi]$ функций, то положим $R_n(p_k, t_k, \Psi) = \sup\limits_{\varphi\in\Psi} R_n(p_k, t_k, \varphi)$. Обозначим через $\zeta_n[\Psi]$ величину $\zeta_n[\Psi] = \inf\limits_{p_k, t_k} R_n(p_k, t_k, \Psi)$, в которой нижняя грань берется по всевозможным n узлам $t_k(0 \le t_k \le 2\pi)$ и весам $p_k(s)$, $\quad k = 1, 2, \ldots, n$. К.ф.

(1.4), построенную на узлах t_k^* и весах $p_k^*(s)$, будем, следуя Н. С. Бахвалову [14] и В. В. Иванову [82], называть оптимальной, асимптотически оптимальной, оптимальной по порядку, если $R_n(p_k^*, t_k^*, \Psi) = \zeta_n[\Psi]$; $\quad R_n(p_k^*, t_k^*, \Psi) \sim \zeta_n[\Psi]$, $\quad R_n(p_k^*, t_k^*, \Psi) \asymp \zeta_n[\Psi]$ соответственно.

Аналогичным образом вводится понятие оптимальных, асимптотически оптимальных и оптимальных по порядку к.ф. для интегралов со слабой степенной особенностью, логарифмической особенностью, для многомерных сингулярных интегралов различных видов.

При постановке задачи построения оптимальных по сложности алгоритмов вычисления интегралов будем следовать книге [150]. В качестве набора простейших операций возьмем набор $P =$ (арифметические операции, вычисление значения функции).

Пусть $\eta-$ информационный оператор, допустимый по отношению к $P, A-$ алгоритм, использующий допустимую информацию η. Через $\mathrm{comp}(\eta(\mathrm{f}))$ обозначается информационная сложность вычисления $\eta(f)$. Это означает, что если $\eta(f)$ требует выполнения простейших операций $p_1, p_2, \ldots, p_k$, то $\mathrm{comp}(\eta(\mathrm{f})) = \sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \mathrm{comp}(\mathrm{p_i})$.

Для вычисления $A(\eta(f))$ следует вычислить $y = \eta(f)$ и вычислить $A(y)$. Пусть вычисление $A(y)$ требует выполнения простейших операций $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Величина $\mathrm{comp}(\mathrm{A(y)}) = \sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \mathrm{comp}(\mathrm{q_i})$ называется комбинаторной сложностью вычислений $A(y)$.

Пусть E_1 и E_2- линейные пространства, E_0- множество в линейном пространстве E_1, $\quad S : E_0 \to E_2-$ линейный или нелинейный оператор, $\epsilon > 0-$ вещественное число. Задача состоит в отыскании ϵ-приближения $x = x(f)$ к решению α задачи $\alpha = S(f) : \|x - \alpha\| \le \epsilon$ для всех $f \in E_0$. В задаче $\alpha = S(f) \quad S$ называется оператором решения, $f-$ элементом задачи, $\alpha-$ элементом решения. Обозначим через $\Delta(f) = \{\tilde{f} : \eta(\tilde{f}) = \eta(f), \quad \tilde{f} \in E_0\}$ прообраз в E_0 элемента $y = \eta(f)$. Радиусом информации η для задачи S называется величина

$$r(\eta, S) = \sup_{\mathrm{f}\in\mathrm{E_0}} \quad \inf_{\alpha\in\mathrm{E_2}} \quad \sup_{\tilde{\mathrm{f}}\in\Delta(\mathrm{f})} \|\alpha - \mathrm{S}(\tilde{\mathrm{f}})\|.$$

Погрешностью алгоритма A называется величина

$$e(A) = \sup_{\mathrm{f}\in\mathrm{E_0}} \|\mathrm{A}(\eta(\mathrm{f})) - \mathrm{S}(\mathrm{f})\|.$$

Пусть $r(\eta, S) < \epsilon$ для некоторого допустимого η. Обозначим через $\Phi(\epsilon)$ класс всех допустимых алгоритмов, для которых $e(A) < \epsilon$. Будем считать класс $\Phi(\epsilon)$ непустым. Так как набор простейших операций фиксирован, зависимость сложности от P не рассматривается.

Сложность алгоритма $\varphi \in \Phi$ определяется равенством

$$\mathrm{comp}(\varphi) = \sup_{\mathrm{f} \in \mathrm{E}_0} (\mathrm{comp}(\eta(\mathrm{f})) + \mathrm{comp}(\varphi(\eta(\mathrm{f}))).$$

Определение 1.5 [150]. Величина $\mathrm{comp}(\eta, \mathrm{S}, \epsilon)$, определяемая формулой

$$\mathrm{comp}(\eta, \mathrm{S}, \epsilon) = \begin{cases} \inf_{\varphi \in \Phi(\epsilon)} \mathrm{comp}(\varphi), & \mathrm{r}(\eta, \mathrm{S}) < \epsilon \\ \varphi(\epsilon) \neq \oslash, & \\ \infty - \quad , & \end{cases}$$

называется ϵ-сложностью задачи S при использовании информации, задаваемой оператором η.

В книге [150] дано определение оптимального по сложности алгоритма. Распространим это определение на асимптотически оптимальные и оптимальные по порядку алгоритмы.

Определение 1.6. Алгоритм $\varphi^{oc} \in \Phi(\epsilon)$ называется оптимальным, асимптотически оптимальным, оптимальным по порядку по сложности алгоритмом для задачи S при использовании информации η, если $\mathrm{comp}(\varphi^{\mathrm{oc}}) = \mathrm{comp}(\eta, \mathrm{S}, \epsilon)$, $\quad \mathrm{comp}(\varphi^{\mathrm{oc}}) \sim \mathrm{comp}(\eta, \mathrm{S}, \epsilon)$,
$\mathrm{comp}(\varphi^{\mathrm{oc}}) \asymp \mathrm{comp}(\eta, \mathrm{S}, \epsilon)$ соответственно.

При построении оптимальных методов восстановления сопряженных функций нам понадобятся определения поперечников Бабенко и Колмогорова.

Пусть $B-$ банахово пространство, $X \subset B-$ компакт , $: X \to$
$\to \bar{X}-$ представление компакта $X \subset B$ конечномерным пространством $\bar{X}$.

Определение 1.7 [145]. Пусть L^n- множество n-мерных линейных подпространств пространства B. Выражение

$$d_n(X, B) = \inf_{L^n} \sup_{x \in X} \inf_{u \in L^n} \|x - u\|,$$

где последний inf берется по всем подпространствам L^n размерности n, определяет n-поперечник Колмогорова.

Определение 1.8 [145]. Пусть $\chi-$ множество всех n-мерных линейных подпространств пространства $B, \mathrm{Map(X,}\chi)-$ совокупность всех непрерывных отображений вида $: X \to \bar{X}$, где $\bar{X} \in \chi$. Выражение

$$d'_n(X,B) = \inf_{(L^n,\pi)} \sup_{x\in X} \|x - \pi(x)\|,$$

где inf берется по всевозможным парам (L^n, π), состоящим из n-мерного линейного пространства $L^n \subset B$ и непрерывного отображения $\pi : X \to L^n$, определяет линейный n-поперечник Колмогорова.

Определение 1.9 [145]. Пусть $\chi \in R^n$. Выражение

$$d_n(X) = \inf_{(:X\to R^n)} \sup_{x\in X} \mathrm{diam}^{-1}(\mathrm{x}),$$

где inf берется по всем непрерывным отображениям $: X \to R^n$, определяет n-поперечник Бабенко.

2. Классы функций

В книге С.М. Никольского [116] отмечается, что погрешность любой к.ф. на всем классе интегрируемых функций равна бесконечности и поэтому приходится проводить исследование к.ф. на узких классах функций. Это замечание относится и к сингулярным интегралам. Ниже описываются классы функций, на которых исследуются алгоритмы вычисления сингулярных интегралов. Описание классов W^rH_ω, W^r_p, $W^{r,s}$, $H^\omega(D)$, $H^{\omega_1\omega_2}(D)$ дается по книге С.М. Никольского [116].

2.1. Классы $\mathbf{W^rH_\alpha}$, $\mathbf{W^r_p}$

Класс $W^r(M;a;b)$ состоит из функций, заданных на отрезке $[a,b]$, непрерывных и имеющих непрерывные производные до $r-1$ порядка включительно и кусочно-непрерывную производную r порядка, удовлетворяющую на этом отрезке неравенству $|f^{(r)}(x)| \le M$.

Широко используется в современном анализе класс $H_\alpha(M;a;b)$ $(0 < < \alpha \le 1)$ - класс функций Гельдера, состоящий из заданных на отрезке $[a,b]$ функций $f(x)$, удовлетворяющих во всех точках x' и x'' этого отрезка неравенству $|f(x') - f(x'')| \le M|x' - x''|^\alpha$.

Через $W^rH_\alpha(M;a,b)$ $(r = 1,2,\ldots;0 < \alpha \le 1)$ обозначается класс функций $f(x)$, имеющих на отрезке $[a,b]$ производные r порядка, удовлетворяющие условию $|f^{(r)}(x') - f^{(r)}(x'')| \le M|x' - x''|^\alpha$ при всех x' и x'' из $[a,b]$.

Через $H_p^{r+\alpha}$ $(0 < \alpha \leq 1,\ 1 \leq p < \infty,\ r = 1, 2, \ldots)$ обозначено множество периодических с периодом 2π функций, r-е производные которых суммируемы в p-й степени и удовлетворяют интегральному условию Гельдера

$$|\int\limits_0^{2\pi} |f^{(r)}(t+h) - f^{(r)}(t)|^p dt|^{1/p} \leq Ah^\alpha.$$

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $\omega(x)$, удовлетворяющая условиям $\omega(0) = 0,\ 0 \leq \omega(x_2) - \omega(x_1) \leq \omega(x_2 - x_1)$ для всех x_1 и x_2, для которых $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$.

Класс $W^r H_\omega(a, b)$ состоит из функций $f(x)$, заданных на $[a, b]$, имеющих на этом отрезке производную $f^{(r)}(x)$ порядка r, удовлетворяющую неравенству $|f^{(r)}(x_2) - f^{(r)}(x_1)| \leq \omega(x_2 - x_1)$ $(a \leq x_1 \leq x_2 \leq b)$.

Через $\tilde{W}^r H_\omega(a, b)$ обозначен класс периодических функций с периодом $(b - a)$, входящих в класс $W^r H_\omega(a, b)$.

Класс $W^r_{L_p}(M; a, b)$ состоит из функций, заданных на $[a, b]$, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $r - 1$ и производную $f^{(r)}(x)$ порядка r, такую, что $[\int\limits_a^b |f^{(r)}(x)|^p dx]^{1/p} \leq M (p \leq 1)$, где интеграл понимается в смысле Лебега. Для простоты обозначений ниже вместо W^r_{Lp} будем писать W^r_p.

Через $\tilde{W}^r_p(M; a, b)$ обозначен класс периодических функций с периодом $(b - a)$, входящих в класс $W^r_p(M; a, b)$.

Через $W^r_p(1, 1; -1, 1)$ обозначено множество функций φ, входящих в класс W^r_p и обладающих дополнительным условием:

$$\int\limits_{-1}^{0} |\varphi(t)|^p dt \leq 1, \qquad \int\limits_{0}^{1} |\varphi(t)|^p dt \leq 1.$$

Через $H_{\alpha,\rho}(1)$ обозначен класс функций $f(t)$, определенных на промежутке $(-\infty, \infty)$ и удовлетворяющих условию

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq |t_1 - t_2|^\alpha / \rho(t_1, t_2),$$

где $\rho(t_1, t_2)-$ весовая функция.

Класс $\overline{W}^r(M; -\infty, \infty)$ состоит из функций, определенных на промежутке $(-\infty, +\infty)$, непрерывных и имеющих непрерывные производные

до $(r-1)$-го порядка включительно и кусочно-непрерывную производную r-го порядка, удовлетворяющую на этом промежутке неравенству

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} |f^{(r)}(x)| \leq M.$$

Через $W^r_\rho(1)$ обозначен класс функций $f(t)$, представимых в виде $f(t) = \varphi(t)/\rho(t)$, где $\varphi(t) \in W^r(1), \rho(t)-$ весовая функция.

Через $\overline{W}^r_\rho(1)$ обозначен класс функций $f(t)$, представимых в виде

$$f(t) = \varphi(t)/\rho(t),$$

где $\varphi(t) \in \overline{W}^r(1), \rho(t)-$ весовая функция.

Ниже в качестве весовых функций берутся

$$\rho_0(t_1,t_2) = \max(1,|t_1|,|t_2|), \rho_1(t_1,t_2) = (\rho_0(t_1,t_2))^\lambda,$$

$$\rho_0(t) = \max(1,|t|), \rho_1(t) = (\rho_0(t))^\lambda.$$

2.2. Классы $\mathbf{W^{rs}H_{\omega_1\omega_2}}$, $\mathbf{W^{rs}H_\omega}$

Через $H_{\omega_1\omega_2}(D)$ обозначен класс определенных на $D = \{a \leq x \leq \leq b, \quad c \leq y \leq d\}$ функций $f(x,y)$, таких, что для любых точек (x',y') и (x'',y'') из D $|f(x',y') - f(x'',y'')| \leq \omega_1(|x'-x''|) + \omega_2(|y'-y''|)$, где $\omega_1(\delta)$ и $\omega_2(\delta)-$ заданные модули непрерывности. В случае, когда $\omega_i(x) = x^{\alpha_i}$ $(i = 1,2)$, используется обозначение $H_{\alpha_1\alpha_2}(D)$. Наряду с обозначением $H_{\alpha_1\alpha_2}(D)$ используется обозначение $H_{\alpha_1,\alpha_2}(1)$ для класса функций $f(x_1,x_2)$, удовлетворяющих по каждой переменной условию Гельдера с показателем α и коэффициентом, равным единице.

$W^{r,s}H_{\omega_1,\omega_2}(D)$ означает класс определенных на D функций $f(x,y)$, имеющих производные $f^{(\alpha,\beta)}(x,y) = \partial^{\alpha+\beta}f(x,y)/\partial x^\alpha \partial y^\beta$ $(0 \leq \alpha \leq r,$ $0 \leq \beta \leq s)$, причем $f^{(r,s)} \in H_{\omega_1\omega_2}$.

Через $\tilde{W}^{r,s}H_{\omega_1,\omega_2}(D), D = [a,b;a,b]$ обозначено множество функций $\varphi(x,y)$, принадлежащих классу функций $W^{r,s}H_{\omega_1,\omega_2}(D)$, и периодических с периодом $b-a$ по каждой переменной.

Через $\overline{W}^{r_1,r_2}(1)$ обозначен класс функций $\varphi(x,y)$, имеющих частные производные по переменным x и y до r_1 и r_2 порядка включительно, причем

$$\|\varphi^{(r_1,0)}(x,y)\|_C \leq 1, \quad \|\varphi^{(0,r_2)}(x,y)\|_C \leq 1, \quad \|\varphi^{(r_1,r_2)}(x,y)\|_C \leq 1.$$

В статьях В.Ф.Бабенко [5,6] рассматривались классы функций $H_j^\omega(D)$ $(j = 1, 2, 3)$, определенных в области D. Функция $\varphi \in H_j^\omega(D)$, если $|\varphi(x) - \varphi(y)| \le \omega(\rho_j(x, y))$ $(x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2))$, где $\rho_1(x, y) = \max\limits_{i=1,2}(|x_i - y_i|)$, $\rho_2(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{2} |x_i - y_i|$, $\rho_3(x, y) = [\sum\limits_{i=1}^{2} |x_i - y_i|^2]^{1/2}$. Распространение определения классов $H_j^\omega(D)$ на области с произвольным конечным числом измерений очевидно.

Пусть $p(x), x \in D-$ функция, интегрируемая по Риману в области D. Через $H_{p,j}^\omega(D)$ обозначен класс функций, представимых в виде $f(x) = p(x)\varphi(x)$, где $p(x)-$ весовая функция, а $\varphi \in H_j^\omega(D)$.

Через $C_l^r(1)$ обозначен класс функций l независимых переменных, у которых существуют и ограничены по модулю единицей все частные производные до r-го порядка включительно.

Через $W_p^{r_1,r_2}(1), 1 \le p \le \infty$, обозначен класс функций $\varphi(x, y)$, определенных на прямоугольнике $D = [a, b; c, d]$ и удовлетворяющих следующим условиям:
1) $\|\varphi^{(r_1,r_2)}(x_1, x_2)\|_{L_p(D)} \le 1$,
2) $\|\varphi^{(r_1,j)}(x_1, 0)\|_{L_p(a,b)} \le 1, j = 0, 1, \ldots, r_2 - 1$,
3) $\|\varphi^{(j,r_2)}(0, x_2)\|_{L_p(c,d)} \le 1, j = 0, 1, \ldots, r_1 - 1$,
в предположении, что выписанные частные производные существуют и кусочно-непрерывны.

Пусть $D = [a, b]^2$. Через $W_p^{r_1+\alpha_1,r_2+\alpha_2}$ обозначен класс функций $\varphi(x, y)$, принадлежащих $W_p^{r_1,r_2}$, производные $\varphi^{(r_1,r_2)}(x, y)$ которых удовлетворяют в метрике пространства $L_p[a, b]$ по первой и второй переменным в отдельности интегральному условию Гельдера с показателями α_1 и α_2 соответственно.

Через $W_{L_p[D]}^r(1)$ обозначим класс функций, имеющих частные производные до r порядка включительно, ограниченные в метрике пространства $L_p[D]$ единицей. Через D обозначены квадраты $[0, 2\pi; 0, 2\pi]$ или $[-1, 1; -1, 1]$.

2.3. Классы $\mathbf{D_s^\alpha}$, $\mathbf{H_s^\alpha}$, $\mathbf{E_s^\alpha}$

Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ непрерывна в s - мерном кубе G_s, определенном неравенствами $0 \le x_v \le 2\pi$ $(v = 1, 2, \ldots, s)$ и имеет период, равный 2π по каждой переменной $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Через
$C(m_1, \ldots, m_s)$ обозначены коэффициенты Фурье этой функции. Величи-

ны $\bar{m}_v$ определены равенствами $\bar{m}_v = 1$, если $m_v = 0$, $\bar{m}_v = |m_v|$, если $m_v \neq 0$.

В монографии Н.М.Коробова [94] введены классы E_s^α, H_s^α, D_s^α.

Определение 2.1. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ принадлежит классу E_s^α, если выполняется оценка $C(m_1, \ldots, m_s) = O((\bar{m}_1 \cdot \bar{m}_2 \ldots \bar{m}_s)^{-\alpha})$, где $\alpha-$ действительное число, большее единицы, и константа в знаке O не зависит от $m_1, m_2, \ldots, m_s$. Если нужно подчеркнуть, что
$C(m_1, \ldots, m_s) \leq A(\bar{m}_1 \bar{m}_2 \ldots \bar{m}_s)^{-\alpha})$, то вместо E_s^α пишут $E_s^\alpha(A)$.

Определение 2.2. Пусть $\alpha \geq 1-$ целое. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ (не обязательно периодическая) принадлежит классу H_s^α, если в кубе G_s она имеет непрерывные производные вида $\partial^n f / \partial x_1^{n_1} \ldots \partial x_s^{n_s}$ $(0 \leq$
$\leq n \leq \alpha s$, $0 \leq n_j \leq \alpha)$.

Если эти производные непрерывны во всем s-мерном пространстве и функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ имеет период, равный 2π по каждой из переменных, то говорят, что $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ $2\pi-$ периодическая функция из класса H_s^α.

Замечание. В математической литературе используются обозначения H_s^α и H_i^α классов функций, введенных соответственно Н.М.Коро-бовым и В.Ф.Бабенко. Во избежание путаницы в дальнейшем, в случае необходимости, будем обозначать класс H_s^α функций, введенных Н. М. Коробовым, через $H_{s,k}^\alpha$.

Определение 2.3. Класс D_s^α состоит из функций, имеющих непрерывные производные вида

$$\partial^n f / \partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \cdots \partial x_s^{n_s} \qquad (0 \leq n \leq \alpha s, \quad 0 \leq n_v \leq \alpha s).$$

Запись $H_s^\alpha(C)$ или $D_s^\alpha(C)$ означает, что модули производных
$\partial^n f / \partial x_1^{n_1}, \ldots, \partial x_s^{n_s}$ ограничены в G_s константой C.

2.4. Некоторые другие классы

В главе 3 будут исследованы к.ф. на классе Ф. Подробно этот класс описан в книге А.И.Гусейнова и Х.Ш.Мухтарова [67]. Здесь же приводятся только необходимые для дальнейшего определения и свойства функций из класса Ф.

Определение 2.4. Функция $\varphi(\sigma)$ называется почти возрастающей (почти убывающей) на $[0, l]$, если для любых $\sigma_1 \leq \sigma_2$:

$$\varphi(\sigma_1) \leq C\varphi(\sigma_2), \qquad (\varphi(\sigma_2) \leq C\varphi(\sigma_1)).$$

Определение 2.5. Функция $\omega(\sigma)$ принадлежит классу Φ, если она определена в $[0, l_0]$ и удовлетворяет условиям:

а) $\omega(\sigma)$ является модулем непрерывности;

б) $\sigma \int\limits_0^{l_0} \frac{\omega(t)}{t(t+\sigma)} dt \leq D\omega(\sigma)$;

в) $\omega'(\sigma) \sim \omega(\sigma)/\sigma$.

В статье Н.К.Бари и С.Б.Стечкина [10] приведены основные свойства функции класса Φ:

1) если $\varphi(t) \in \Phi$, то $\varphi(t)/t$ почти убывает;

2) если $\varphi(t) \in \Phi$, то существуют $0 < \alpha$, $\beta < 1$, такие, что $\varphi(t)/t^\alpha$ почти возрастает, а $\varphi(t)/t^\beta$ почти убывает;

3) если $\varphi(t) \in \Phi$, то и $t/\varphi(t) \in \Phi$.

В статье Н.С.Бахвалова [11] введен класс функций $P_\alpha(C)$. По аналогии можно ввести следующие классы функций:

класс $L_\alpha(C)$ функций φ, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (E_n(\varphi))^2 n^{2\alpha} \ln^2 n \leq C$, где $E_n(\varphi)-$ наилучшее равномерное приближение функции φ полиномами степени не выше n;

класс $\Phi_\alpha(C)$ функций φ, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} (E_n^2(\varphi) n^{2\alpha} \leq C.$$

В статье Маунг Чжо Ньюна и И.Ф.Шарыгина [105] введен класс функций $D_s^{1,l}$.

Определение 2.6. Через $D_s^{1,l}$ обозначен класс непрерывных функций $\varphi(x_1, \ldots, x_s)$, определенных в некотором параллелепипеде D_s и имеющих кусочно-непрерывные частные производные, такие, что $\sum\limits_{i=1}^{s} |\partial\varphi/\partial x_i| \leq 1$.

Определение 2.7 [85]. Пусть функция $\psi(x)$ $(x \geq 0)$ положительная и непрерывна. Обозначим через V_ψ^r класс функций $x(t)$, $t \in [0, 2\pi]$, имеющих непрерывные производные до порядка r и удовлетворяющих неравенству $\int\limits_0^{2\pi} \psi(|x^{(r)}(t)|) dt \leq 1$.

Будем предполагать, что функция $\psi(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $\psi(0)=0$, $\psi(x)-$ выпуклая и возрастающая на $[0,\infty)$, $\psi(x)\to+\infty(x\to+\infty)$.

в) Функция $[\psi^{-1}(x)]^2x^{-1}-$ возрастающая (здесь через ψ^{-1} обозначается функция, обратная к функции ψ);

с) $\psi(xy)\le N\psi(x)\psi(y)$ для некоторого $N>0$ и всех $x\ge 0$, $y\ge 0$ (это условие называется $\Delta'-$ условием).

Определение 2.8 [30], [36]. Пусть $\Omega=[-1,1]^l$, $\quad l=1,2,\ldots$ Функция $\varphi(x_1\ldots,x_l)$ принадлежит классу $Q_{r,\gamma}(\Omega,M)$, если выполнены условия

$$\max_{x\in\Omega}|\partial^{|v|}\varphi(x)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}|\le M$$

при $0\le|v|\le r$,

$$|\partial^{|v|}\varphi(x)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}|\le M/(d(x,))^{v-r-\zeta}$$

при $r<|v|\le s$,
где $s=r+\gamma$, $\quad\zeta=0$, если $r+\gamma-$ целое; $s=r+[\gamma]+1$, $\quad\gamma=$ $=[\gamma]+\mu$, $\quad 0<\mu<1$, $\quad\zeta=1-\mu$, если $r+\gamma-$ нецелое. Здесь $x=$ $=(x_1,\ldots,x_l), v=(v_1,\ldots,v_l), |v|=v_1+\cdots+v_l, d(x,)-$ расстояние от точки x до границы области Ω, вычисляемое по формуле $d(x,)=$ $=\min_{1\le \mathrm{i}\le \mathrm{l}}\ \min(|-1-\mathrm{x_i}|,|1-\mathrm{x_i}|)$.

Определение 2.9. Пусть $\Omega=[-1,1]^l$, $\quad l=1,2,\ldots,$ $\gamma-$ целое число. Функция $\varphi(x_1,\ldots,x_l)$ принадлежит классу $Q^*_{r,\gamma}(\Omega,M)$, если выполнены условия

$$\max_{x\in\Omega}|\partial^{|v|}\varphi(x)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}|\le M$$

при $0\le|v|<r$,

$$\max_{x\in\Omega}|\partial^{|v|}\varphi(x)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}|\le M|\ln d(x,\Gamma)|$$

при $|v|=r$,

$$|\partial^{|v|}\varphi(x)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}|\le M/(d(x,))^{v-r-\zeta}$$

при $r<|v|\le s$.

Определение 2.10. Пусть $\Omega=[-1,1]$. Функция $f(t)$ принадлежит классу функций $Q^*_{s,r,1,\gamma}(\Omega,M)$, если выполнены условия

$$\left|\frac{d^v f(t)}{dt^v}\right|\le M,\quad 0\le v\le r,$$

$$|f^{(r)}(t_1) - f^{(r)}(t_2)| \le A|t_1 - t_2||\ln|t_1 - t_2||,$$
$$\left|\frac{d^v f(t)}{dt^v}\right| \le \frac{A}{(d(t,\Gamma))^{v-r-\zeta}}, \quad r < v \le s,$$
где $\gamma = s - r - \zeta$, $0 \le \zeta \le 1$.

Классы $Q_{r,\gamma}(\Omega, M), Q^*_{r,\gamma}(\Omega, M), Q^*_{r,1,\gamma}(\Omega, M)$ являютя обобщением класса функций $Q_r(\Omega, M)$, введенного в работе [8].

Через $H_p(1)$ $(1 \le p \le \infty)$ обозначается класс функций Харди, аналитических внутри единичной окружности γ с центром в начале координат, с нормой
$$\|f\| = \left[\lim_{\rho\to 1-0} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f\left(\rho e^{i\sigma}\right)|^p \, d\sigma\right]^{1/p} \le 1.$$

Обозначим через $H^r_p(1)$ $(r = 0, 1, \ldots; 1 \le p \le \infty)$ класс функций, аналитических внутри γ, имеющих производные до r-го порядка включительно на контуре γ и удовлетворяющих условию
$$\lim_{\rho\to 1-0} \frac{1}{2\pi} \left[\int\limits_0^{2\pi} |f^{(r)}(\rho e^{i\sigma})|^p \, d\sigma\right]^{1/p} \le 1 \quad \text{при} \quad 1 \le p < \infty,$$
$$\lim_{\rho\to 1-0} \sup_{0\le\sigma\le 2\pi} \left|f^{(r)}\left(\rho e^{i\sigma}\right)\right| \le 1 \qquad \text{при} \quad p = \infty.$$

Обозначим через $H^{r,\alpha}_\infty(1)$ класс функций, входящих в класс $H^r_\infty(1)$ и удовлетворяющих на окружности γ дополнительному условию
$$|f^{(r)}(t_1) - f^{(r)}(t_2)| \le |t_1 - t_2|^\alpha.$$

Пусть $f(z_1, \ldots, z_l)$ – функция l комплексных переменных, аналитическая по каждой переменной z_i внутри единичной окружности γ_i с центром в начале координат комплексной плоскости z_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$.

Обозначим через D^+_i область, расположенную внутри единичной окружности γ_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$.

Будем говорить, что функция $f(z_1, \ldots, z_l) \in H^{r,\ldots,r}_p(1)$, если она по каждой переменной z_i имеет частные производные до r-го порядка включительно
$$f^r_i(z_1, \ldots, z_l) = \frac{\partial f(z_1, \ldots, z_l)}{\partial z^r_i},$$

удовлетворяющие условию

$$\sup_{1\le i\le l}\sup\lim_{\rho\to 1-0}\int\limits_{\gamma_i}|f_i^{(r)}\left(z_1,\dots,z_{i-1},\rho e^{i\sigma_i},z_{i+1},\dots,z_l\right)|^p\,d\sigma_i\le 1,$$

где $D_k=D_k^+\cup\gamma_k$, второй supremum берется по множеству $(z_1,\dots,z_{i-1},z_{i+1},\dots,z_l)\in\cup_{k=1,k\ne i}^l D_k$.

Определение 2.12 [115]. Функция $g=g_v(z)=g_{v_1,\dots,v_n}(z_1,\dots,z_n)$ называется целой функцией экспоненциального типа v, если для нее выполняются следующие свойства:

1) она есть целая функция по всем переменным, т.е. разлагается в степенной ряд

$$g(z)=\sum_{k\ge 0}c_kz^k=\sum_{k_i\ge 0,i=1,2,\dots,n}a_{k_1,\dots,k_n}z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n}$$

с постоянными коэффициентами $a_k(a_{k_1,\dots,k_n})$, абсолютно сходящийся для всех комплексных $z=(z_1,\dots,z_n)$;

2) для всякого $\epsilon>0$ существует положительное число A_ϵ такое, что для всех комплексных чисел $z_k=x_k+iy_k$ $(k=1,2,\dots,n)$ выполняется неравенство

$$|g(z)|\le A_\epsilon\exp\{\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}}(\mathrm{v_j}+\epsilon)|\mathrm{z_j}|\}.$$

В этом случае говорят, что функция $g_v(z)$ принадлежит классу E_v.

3. Вспомогательные утверждения

В данном параграфе приводится ряд известных фактов из теории приближений, которыми будем пользоваться на протяжении книги. Прежде всего напомним некоторые классические результаты конструктивной теории функций. При изложении этих результатов будем следовать монографиям [68], [112].

3.1. Полиномы наилучшего приближения

Пусть $f(x)-$ функция, определенная на сегменте $[a,b]$. Обозначим через H_n множество полиномов степени не выше n, т. е. полиномов вида $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$, а через H_n^T – множество тригонометрических полиномов вида $a_0+\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx$.

Рассмотрим произвольный полином $P_n(x)$ и положим

$$\Delta(P_n) = \max_{x\in[a,b]} \mid P_n(x) - f(x) \mid .$$

Число $\Delta(P_n)$ называется отклонением полинома $P_n(x)$ от функции $f(x)$. Если будем изменять полином $P_n(x)$, заставляя его пробегать все множество H_n, то величина $\Delta(P_n)$ также будет изменяться, но так как она остается неотрицательной, то множество ее значений ограничено снизу и имеет точную нижнюю границу

$$E_n = E_n(f) = \inf_{P_n\in H_n} \{\Delta(P_n)\}.$$

Величина $E_n(f)$ называется наименьшим отклонением полиномов из H_n от $f(x)$ или наилучшим приближением к $f(x)$ полиномами из H_n.

Теорема 3.1 (теорема Бореля). Для всякой функции $f(x) \in$ $\in C[a,b]$ в множестве H_n существует такой полином $P(x)$, что $\Delta(P) = E_n(f)$.

Следует отметить, что для всякой функции $f(x) \in C[a,b]$ в множестве H_n существует единственный полином наилучшего приближения. Это утверждение следует из теоремы Бореля и чебышевского альтернанса.

Приведем оценки наилучших приближений к $f(x)$ полиномами из H_n. Вначале дадим формулировки классических теорем Джексона.

Теорема 3.2. Для любой функции $f \in C_{2\pi}$ справедлива оценка

$$E_n(f) \le 12\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Теорема 3.3. Пусть $f(x)$ есть непрерывная 2π-периодическая функция, имеющая непрерывные производные $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(r)}(x)$. Если $\omega_r(\delta)-$ модуль непрерывности r-й производной $f^{(r)}(x)$, то

$$E_n(f) \le \frac{12^{r+1}\omega_r\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r}.$$

Если функция $f(x)$ приближается алгебраическими полиномами, то теоремы Джексона формулируются следующим образом.

Теорема 3.4. Если $f(x) \in C[a,b]$, то

$$E_n(f) \le 12\omega\left(\frac{b-a}{2n}\right).$$

Теорема 3.5. Если $f(x) \in C[a,b]$ имеет непрерывных производных, причем модуль непрерывности $f^{(p)} = \omega_p(\delta)$, то для $n > p$ справедлива оценка

$$E_n(f) \leq \frac{C_p(b-a)^p}{n^p}\omega_p\left(\frac{b-a}{2(n-p)}\right),$$

где C_p зависит только от p.

Наряду с оценками наилучших приближений тригонометрическими и алгебраическими полиномами различных классов функций, т.е. прямыми теоремами конструктивной теории функций, нам понадобятся обратные теоремы конструктивной теории функций, позволяющие по числовым характеристикам $E_n(f)$ судить о классах функций, к которым принадлежат функции $f(x)$.

Предварительно приведем неравенства С.Н. Бернштейна,
А.А. Маркова и С.М. Никольского , которыми также будем неоднократно пользоваться.

Теорема 3.6 (первое неравенство Бернштейна). Если

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) -$$

тригонометрический полином порядка n, то справедлива оценка

$$|T'(x)| \leq n \max |T(x)|.$$

Теорема 3.7 (второе неравенство Бернштейна). Если полином $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ степени не выше n на сегменте $[a,b]$ удовлетворяет неравенству $|P_n(x)| \leq M$, то на интервале (a,b) $|P_n(x)| \leq$
$\leq \frac{Mn}{((x-a)(b-x))^{1/2}}$.

Теорема 3.8 (неравенство Маркова). Если полином $P_n(x) =$
$= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ степени не выше n на сегменте $[a,b]$ удовлетворяет неравенству $|P_n(x)| \leq M$, то на том же сегменте $|P_n'(x)| \leq$
$\leq 2Mn^2/(b-a)$.

Теорема 3.9 (неравенство С.М. Никольского) [115]. Пусть $T_n(t)-$ тригонометрический полином n-го порядка. Тогда справедливо неравенство

$$\|T_n(t)\|_C \leq n^{1/p}\|T_n(t)\|_{L_p},\ 1 \leq p \leq \infty.$$

Аналогичное неравенство справедливо и для функций экспоненциального типа.

Теорема 3.10 [115]. Если $1 \le p \le p' \le \infty$, то для целой функции экспоненциального типа $g = g_v \in L_p(R_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$, имеет место неравенство (разных метрик)

$$\|g_v\|_{L_{p'}(R_n)} \le 2^n (\prod_{k=1}^{n} v_k)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} \|g_v\|_{L_p(R_n)}.$$

При фиксированных n и произвольных v_k это неравенство точно в смысле порядка.

Приводимые ниже обратные теоремы конструктивной теории функций принадлежат С.Н. Бернштейну.

Теорема 3.11. Пусть $f(x) \in C_{2\pi}$ и для любого n наилучшее приближение полиномами из H_n^T $E_n \le An^{-\alpha}$. Тогда если $0 < \alpha < 1$, то $f(x) \in H_\alpha$, а если $\alpha = 1$, то $f(x) \in Z$.

Теорема 3.12. Пусть $f(x) \in C_{2\pi}$ и E_n – ее наилучшее приближение полиномами из H_n^T. Если $E_n \le \frac{A}{n^{r+\alpha}}$, где $r-$ натуральное число, а $0 < \alpha \le 1$, то у функции $f(x)$ существуют непрерывные производные $f'(x), f''(x), \dots, f^{(r)}(x)$, причем $f^{(r)} \in H_\alpha$, если $\alpha < 1$, и $f^{(r)} \in Z$, если $\alpha = 1$.

Напомним, что через Z обозначен класс функций Зигмунда, определенный следующим соотношением: для модуля непрерывности $\omega(\delta)$ справедливо неравенство $\omega(\delta) \le A\delta(1 + |\ln\delta|)$, где не зависит от δ.

Изложенные выше результаты принадлежат в основном классикам конструктивной теории функций: П.Л. Чебышеву, С.Н. Бернштейну, Д. Джексону и относятся к первому периоду в теории приближений. Их подробное изложение имеется в [3], [68], [92], [112].

В 50-е — 70-е гг. прошлого столетия в конструктивной теории функций были получены новые результаты, многие из которых являются неулучшаемыми. Не имея возможности остановиться на этих результатах, приведем теорему типа Джексона об оценках наилучших приближений.

Теорема 3.13 [92, с.237]. Для любой функции $f \in C, f \not\equiv \text{const}$, справедливы неравенства $E_n(f)_{<\omega(f,\frac{\pi}{n}),n=1,2,\dots,}$ причем не зависящая от f и от n константа 1 перед $\omega(f, \frac{\pi}{n})$ не может быть уменьшена.

Современное состояние конструктивной теории функций и точные оценки приближений полиномами, отрезками рядов и сплайнами изложены в монографиях и обзорах [3], [68], [70] – [72], [91] – [93], [112], [137], [138], [144], [146], [148], [149].

3.2. Интерполяционные полиномы

Мы будем пользоваться следующими известными оценками точности аппроксимации полиномами.

Лемма 3.1 [146, с. 276]. Если функция $f(x)$, заданная на $[-1,1]$, имеет r-ю ($r \geq 0$ целое) непрерывную производную, то существует константа M_r, не зависящая от f, x и n, такая, что для любого $n >$
$> r$ найдется алгебраический многочлен $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, степени не выше, чем n, удовлетворяющий для каждого $x \in [-1,1]$ неравенству

$$|f(x) - P_n(x)| \leq$$

$$\leq M_r \left[\frac{1}{n}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{|x|}{n}\right)\right]^r \omega\left[\frac{1}{n}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{|x|}{n}\right)\right],$$

где $\omega(t) = \omega(f^{(r)}; t)$ есть модуль непрерывности r-й производной.

Обозначим через $T_r(x)$ полином Чебышева степени r, наименее уклоняющийся от нуля в равномерной метрике на сегменте $[-1,1]$, а через $x_1, \ldots, x_r$ его корни. Через $P_r(x,[-1,1])$ обозначим полином, интерполирующий функцию $f(x)$ на сегменте $[-1,1]$ по узлам $x_1, \ldots, x_r$.

Лемма 3.2 [66]. Справедлива оценка погрешности интерполяционной формулы $P_r(x,[-1,1])$:

$$\|f(x) - P_r(x,[-1,1])\| \leq \|f^{(r)}\|/r!2^{r-1}.$$

Доказательство. Для произвольного $t \in [-1,1]$, $t \neq x_k$, $k = 1,2,\ldots,r$, положим

$$\tau = \frac{f(t) - P_r(t,[-1,1])}{T_r(t)}. \tag{3.1}$$

Введем функцию

$$\varphi(x) = f(x) - P_r(x,[-1,1]) - \tau T_r(x).$$

Функция $\varphi(x)$ обращается в нуль в точках $t, x_k, k = 1,2,\ldots,r$. Применяя к функции $\varphi(x)$ $r+1$ раз теорему Ролля, убеждаемся, что существует точка ξ ($\xi \in (-1,1)$) такая, что

$$\varphi^{(r)}(\xi) = f^{(r)}(\xi) - \tau r! = 0.$$

Отсюда $\tau = f^{(r)}(\xi)/r!$.

Используя соотношение (3.1), имеем при $x \neq x_k$, $k = 1, 2, \ldots, r$,

$$|f(x) - P_r(x, [-1, 1])| = |\tau||T_r(x)| \leq \frac{|f^{(r)}(\xi)|}{r!}|T_r(x)| \leq \frac{1}{2^{r-1}r!}\|f^{(r)}(x)\|.$$

В узлах x_k, $k = 1, 2, \ldots, r$, утверждение леммы очевидно.

Лемма доказана.

Аналогичные утверждения имеют место и при интерполяции функций по узлам других ортогональных многочленов. В частности, нам понадобится оценка точности интерполирования функций из класса $W^r(M)$ по узлам полиномов Лежандра.

Обозначим через $\tilde{X}_n(x)$ полином Лежандра

$$\tilde{X}_n(x) = \frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

со старшим коэффициентом, равным 1. Обозначим через x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, узлы полинома Лежандра, а через $P_n(x, [-1, 1])$ обозначим интерполяционный полином Лагранжа, построенный по этим узлам.

Лемма 3.3. Справедлива оценка погрешности интерполяционной формулы $P_n(x, [-1, 1])$ по узлам полинома Лежандра

$$\|f(x) - P_n(x, [-1, 1])\| \leq \|f^{(n)}(x)\|/(2n)!.$$

Доказательство проводится по аналогии с доказательством предыдущей леммы. Для произвольного $t \in [-1, 1]$, $t \neq x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, положим

$$\tau = \frac{f(t) - P_n(f, [-1, 1])}{\tilde{X}_n(t)}$$

и введем функцию $\varphi(x) = f(x) - P_n(x, [-1, 1]) - \tau\tilde{X}_n(x)$. Функция $\varphi(x)$ по построению имеет $n + 1$ корень, и, следовательно, по теореме Ролля существует такая точка ξ, $-1 < \xi < 1$, в которой $\varphi^{(n)}(\xi) = 0$. Это означает, что $f^{(n)}(\xi) - \tau n! = 0$. Следовательно, $\tau = f^{(n)}(\xi)/n!$ и

$$\|f(x) - P_n(x, [-1, 1])\| \leq |\tau|\|\tilde{X}_n(x)\| \leq \|f^{(n)}\|/(2n)!$$

в точках $x \neq x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. В узлах x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, утверждение леммы очевидно.

Лемма доказана.

Через $W_p^s(\Delta)$ обозначается пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{W_p^s(\Delta)} = \|u\|_{L_p(\Delta)} + \|u\|_{L_p^s(\Delta)},$$

где

$$\|u\|_{L_p^s(\Delta)} = \left[\sum_{|v|=s} \int\limits_{\Delta} \mid D^v u \mid^p dx\right]^{1/p}.$$

Пусть Δ куб размерности l. Положим $w = s - 1$ и поставим в соответствие каждой функции $u = W_p^s(\Delta)$ полином $R_w(x)$ степени w, удовлетворяющий условиям

$$\int\limits_{\Delta} x^\alpha R_w(x)dx = \int\limits_{\Delta} x^\alpha u(x)dx, \quad \mid \alpha \mid \leq w.$$

Положим $R_w(x) = P_\Delta u$; т.е. $P_\Delta-$ линейный оператор проектирования, отображающий пространство $W_p^s(\Delta)$ на конечномерное пространство полиномов степени w от l переменных.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 3.4 [21, с. 341]. При $sp > l$ для любой функции $u \in W_p^s(\Delta)$ выполняется неравенство

$$\|u - P_\Delta u\|_{C(\Delta)} \leq C(\mathrm{mes}\Delta)^{\mathrm{s/l-1/p}}\|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L_p^s(\Delta)}},$$

причем константа $C = C(p, s, l)$ не зависит от куба Δ.

Лемма 3.5 [21, с. 341]. При $ps \leq l$ и $q < q^* = p(1 - ps/l)^{-1}$ для любой функции $u \in W_p^s(\Delta)$ выполняется неравенство

$$\|u - P_\Delta u\|_{L_q(\Delta)} \leq C(\mathrm{mes}\Delta)^{\mathrm{q^{-1}-q^{*-1}}}\|\mathrm{u}\|_{\mathrm{L_p^s(\Delta)}},$$

причем константа $C = C(p, q, s, l)$ не зависит от куба Δ.

3.3. Элементы теории сплайнов

На протяжении всей книги неоднократно используются методы сплайн-интерполяции. Напомним определения сплайнов, необходимые в дальнейшем.

Функция $f(x)$, заданная на сегменте $[a, b]$, называется сплайном порядка m $(m = 0, 1, \cdots)$ с узлами t_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, $a < t_1 < t_2 <$

$< \cdots < t_N < b$, если в каждом сегменте $[a, t_1], [t_1, t_2], \ldots, [t_N, b]$ функция $f(x)$ является алгебраическим полиномом степени m и в каждой из точек t_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, некоторая производная $f^{(v)}(x)$, $0 \le v \le m$, имеет разрыв.

Говорят, что сплайн $f(x)$ порядка m имеет дефект r_k $(1 \le r_k \le \le m)$ в узле t_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, если в точке t_k непрерывны функции $f(x)$, $f'(x), \ldots, f^{(m-r_k)}(x)$, а производная $f^{(m-r_k+1)}(x)$ в точке t_k терпит разрыв.

Число $r = \max\limits_{1 \le k \le N} r_k$ называется дефектом сплайна.

Будем говорить, что в узле t_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, сплайн $f(x)$ имеет дефект $m+1$, если в этом узле функция $f(x)$ имеет разрыв непрерывности. В этом случае будем говорить, что сплайн $f(x)$ имеет дефект $m + 1$.

Пусть на сегменте $[a, b]$ фиксирована система точек $\Delta_N : a = = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$, которая называется разбиением сегмента $[a, b]$. Через $S_m^r(\Delta_N, [a, b])$ обозначим множество заданных на $[a, b]$ сплайнов порядка m, имеющих узлы с дефектами $r_i \le r$ в точках $t_i (i = 1, 2, \ldots, N - 1)$ разбиения Δ_N. Сплайны, имеющие дефект $m + 1$, называются нулевыми и обозначаются через $S_0(\Delta_N, [a, b])$. При рассмотрении периодических сплайнов в качестве основного промежутка $[a, b]$ будем брать сегмент $[0, 2\pi]$ и вместо обозначения $S_m^r(\Delta_N, [a, b])$ будем использовать обозначение $S_m^r(\Delta_N)$.

Пусть дано равномерное разбиение $\bar{\Delta}_{2n} : \{k\pi/n\}$, $k = 1, 2, \ldots, 2n$. Линейное многообразие сплайнов $S_m^1(\bar{\Delta}_{2n})$ дефекта 1 по равномерному разбиению $\bar{\Delta}_{2n}$ в дальнейшем обозначается как $S_{2n,m}$.

В последующих главах книги сплайны используются для аппроксимации подынтегральных функций в сингулярных и гиперсингулярных интегралах. Поэтому в первую очередь нас интересуют оценки погрешности при приближении гладких функций сплайнами. При изложении этих вопросов будем следовать монографии Н.П. Корнейчука [93].

Прежде всего остановимся на приближении непрерывных функций кусочно-постоянными функциями, т.е. нулевыми сплайнами. Пусть на сегменте $[a, b]$ дано фиксированное разбиение $\Delta_N : a = t_0 < t_1 < < \cdots < t_N = b$. Обозначим через $|\Delta_N|$ величину $|\Delta_N| = \max\limits_{0 \le k \le N-1} |t_{k+1} - - t_k|$. Наряду с модулем непрерывности $\omega(f, \delta)_{C[a,b]}$ функции $f \in C[a, b]$

вводится величина

$$\Omega(f,\Delta_N,[a,b]) = \max_{1\le i\le N} \Omega_i(f,\Delta_N,[a,b]),$$

где

$$\Omega_i(f,\Delta_N,[a,b]) = \max_{t_{i-1}\le t\le t_i} f(t) - \min_{t_{i-1}\le t\le t_i} f(t), \qquad i=1,2,\dots,N.$$

Очевидно

$$\Omega_i(f,\Delta_N,[a,b]) \le \omega(f,|\Delta_N|)_{C[a,b]},$$

так что для $f\in C[a,b]$ имеем $\Omega_i(f,\Delta_N,[a,b])\to 0$ при $|\Delta_N|\to 0$.

Пусть $f\in C[a,b]$. Среди функций множества $S_0(\Delta_N,[a,b])$ наименее уклоняется от $f(t)$ в метрике $L_\infty[a,b]$ функция

$$s(f,t) = \frac{1}{2}[\max_{t_{i-1}\le t\le t_i} f(t) + \min_{t_{i-1}\le t\le t_i} f(t)], \qquad t_{i-1}<t<t_i, \qquad i=1,2,\dots,N,$$

при этом

$$\|f-s(f)\|_\infty = \frac{1}{2}\Omega(f,\Delta_N,[a,b]) \le \frac{1}{2}\omega(f,|\Delta_N|)_C.$$

Кроме того, при $p>0$

$$\int_a^b |f(t)-s(f,t)|^p dt \le 2^{-p}\sum_{i=1}^N (t_i-t_{i-1})\Omega_i^p(f,\Delta_N,[a,b]) \le$$

$$\le 2^{-p}(b-a)\Omega^p(f,\Delta_N,[a,b]).$$

Обозначим через $E_N(f,S_m^r(\Delta_N,[a,b])$ величину наилучшего приближения функции f сплайнами, принадлежащими множеству $S_m^r(\Delta_N,[a,b])$.

Тогда для $f\in C[a,b]$

$$E_N(f,S_0(\Delta_N,[a,b]))_\infty \le \frac{1}{2}\Omega(f,\Delta_N,[a,b]) \le \frac{1}{2}\omega(f,|\Delta_N|)_C.$$

$$E_N(f,S_0(\Delta_N,[a,b]))_p \le \frac{(b-a)^{1/p}}{2}\Omega(f,\Delta_N,[a,b]) \le \frac{(b-a)^{1/p}}{2}\omega(f,|\Delta_N|)_C.$$

В случае равномерного разбиения отсюда вытекают неравенства

$$E_N(f,S_{N,0},[a,b])_\infty \le \frac{1}{2}\omega\left(f,\frac{(b-a)}{N}\right)_C,$$

$$E_N(f, S_{N,0}, [a,b])_p \le \frac{(b-a)^{1/p}}{2}\omega\left(f, \frac{(b-a)}{N}\right)_C,$$

неулучшаемые на множестве $C[a,b]$.

Если положить $[a,b]$ равным $[0,2\pi]$, то все приведенные выше оценки будут справедливы и для периодических с периодом 2π функций из $\tilde{C}[0,2\pi]$, причем эти оценки неулучшаемы при $N = 2n$. В частности, справедливо точное неравенство

$$E_{2n}(f, S_{2n,0})_p \le \frac{(2\pi)^{1/p}}{2}\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_C, \qquad 1 \le p \le \infty.$$

В общем случае справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.14 [93]. Если $f \in W^r$ $(r = 0, 1, \ldots)$, то

$$E_{2n}(f, S_{2n,r})_\infty \le \frac{K_r}{2n^r}\Omega(f^{(r)}, \bar{\Delta}_{2n}) \le \frac{K_r}{2n^r}\omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_C,$$

$$E_{2n}(f, S_{2n,r})_{L_1} \le \frac{2K_{r+1}}{n^r}\Omega(f^{(r)}, \bar{\Delta}_{2n}) \le \frac{2K_{r+1}}{n^r}\omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_C,$$

где K_r- константа Фавара, $K_r = \frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}$, $k = 0, 1, \ldots$ Все оценки точные.

Заканчивая этот раздел, остановимся на оценках для интерполяционных сплайнов. Известно [92], [93], что сплайн $\sigma_{2n,m}(f,t) \in S_{2n,m}$, аппроксимирующий функцию $f(t) \in \tilde{C}[0,2\pi]$, имеет узлы в точках $t_i = i\pi/n$ $(i = 0, 1, \ldots, 2n)$ и нули в точках $\tau_j = j\pi/n + \beta_m$ $(\beta_m = [1 + (-1)^m]\pi/(4n)), j = 0, 1, \ldots, 2n-1$.

Теорема 3.15 [93]. При каждом t верны неулучшаемые на множестве W^m $(m = 1, 2, \ldots)$ неравенства

$$|f(t) - \sigma_{2n,m}(f,t)| \le M_{n,m}(t)\Omega(f^{(m)}, \bar{\Delta}_{2n}) \le M_{n,m}(t)\omega(f^{(m)}, \pi/n),$$

где

$$M_{n,m}(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|D_m(t-u) - \sigma_{2n,m}(D_m(t-u), t)|du,$$

а $D_m(t)-$ функция Бернулли.

Напомним определения функций и полиномов Бернулли.

Функциями Бернулли называют 2π периодические функции

$$D_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx - \pi r/2)}{k^r}, \qquad r = 1, 2, \ldots$$

Из определения функций Бернулли следует, что функции с четными номерами четны, а функции с нечетными номерами — нечетны.

Для $D_1(x)$ известно равенство

$$D_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \begin{cases} (\pi - x)/2,\ 0 < x < 2\pi \\ 0,\ x = 0. \end{cases}$$

Из определения функций Бернулли следует, что $D_2'(x) = D_1(x)$, $0 < x < 2\pi$ и $D_r'(x) = D_{r-1}(x)$, $r = 3, 4, \ldots$, при $|x| \leq \infty$.

Следовательно,

$$D_r(x) = \int\limits_{\beta_r}^{x} D_{r-1}(t)dt, \qquad r = 2, 3, \ldots,$$

где константа β_r определяется условием

$$\int_0^{2\pi} D_r(t)dt = 0.$$

Из отмеченных выше свойств функции $D_r(x)$ следует, что функции

$$B_r^*(t) = -\frac{r!}{2^{r-1}\pi^r} D_r(2\pi t) \qquad (r = 2, 3, 4, \ldots, |t| < \infty);$$

$$B_1^*(t) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} D_1(2\pi t),\ 0 < t < 1, \\ -\frac{1}{\pi} D_1(0+0) = -\frac{1}{2},\ t = 0; \end{cases}$$

$B_1^*(t+1) = B_1^*(t)$, на промежутке $0 \leq t < 1$ являются алгебраическими полиномами степени r с коэффициентом при старшей степени, равным 1:

$$B_1^*(t+1) = B_1^*(t),$$

$$B_r(t) = t^r + \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k t^k.$$

Эти полиномы называются полиномами Бернулли.

Теорема 3.16 Для любой функции $f \in W^r(1)$ $(r = 1, 2, \ldots)$ справедливы соотношения

$$\|f - \sigma_{n,r-1}(f)\|_C \le \|\varphi_{nr}\|_C = \frac{K_r}{n^r} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

а также

$$\|f - \sigma_{n,r-1}(f)\|_{L_p} \le \|\varphi_{nr}\|_{L_p} \qquad (1 \le p < \infty,\ n = 1, 2, \ldots),$$

в частности,

$$\|f - \sigma_{n,r-1}(f)\|_L \le \|\varphi_{nr}\|_L = \frac{4K_{r+1}}{n^r} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

3.4. Некоторые факты из теории квадратурных формул

На протяжении всей книги используется ряд известных утверждений из теории квадратурных и кубатурных формул. Для удобства читателя некоторые из них приводятся в этом параграфе.

Пусть на сегменте $[0, 1]$ задана произвольная система узлов $0 \le$ $\le x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} \le 1$. Зададимся вектором $P = (p_0, p_1, \ldots, p_{m-1})$ коэффициентов и построим линейный функционал

$$L(f) = \sum_{k=0}^{m-1} p_k f(x_k),$$

где $f(x)-$ произвольная непрерывная на сегменте $[0, 1]$ функция.

Положим

$$\int_0^1 f(x)dx = L(f) + R(f), \tag{3.2}$$

где $R(f)-$ погрешность приближения функционала $\int\limits_0^1 f(x)dx$ функционалом $L(f)$.

Известно [116, стр. 45], что если квадратурная формула точна для полиномов до $r-1$ степени включительно, то на классе функций $W^r(M)$ справедливо равенство

$$\int_0^1 f(x)dx - L(f) = \int_0^1 F_r(t) f^{(r)}(t)dt,$$

где

$$F_r(t) = \frac{1}{(r-1)!}\left[\frac{(1-t)^r}{r} - \sum_{k=0}^{m} p_k K_r(x_k - t)\right],$$

а функция $K_r(t)$ определяется формулой

$$K_r(t) = \begin{cases} t^{r-1} \text{ t} \geq 0 \\ 0, \text{ t} < 0. \end{cases}$$

Положим

$$c_r = \max_{f \in W^{(r)}(1;0,1)} \left| \int_0^1 f(x)dx - L(f) \right| = \int_0^1 |F_r(t)|dt.$$

Нас будет интересовать соответствие

$$\int_0^1 f(x)dx \approx L(f) \tag{3.3}$$

между этими двумя линейными функционалами.

Рассмотрим произвольный сегмент $[\alpha, \beta]$. Следуя С.М. Никольскому ([116, .43]), будем называть квадратурную формулу

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \approx L(\alpha, \beta; f), \tag{3.4}$$

где

$$L(\alpha, \beta; f) = \sum_{k=0}^{m-1} p'_k f(x'_k),$$

подобной формуле (3.3), а функционал $L(\alpha, \beta; f)-$ подобным функционалу $L(f)$, если система точек $\alpha, x'_0, x'_1, \ldots, x'_{m-1}, \beta$ геометрически подобна системе 0, $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, 1$, а веса p'_k относятся соответственно к весам p_k, как длина отрезка $[\alpha, \beta]$ к единице, иначе говоря, если выполняются соотношения

$$x'_k = \alpha + x_k(\beta - \alpha), \quad p'_k = p_k(\beta - \alpha) \quad (k = 0, 1, \cdots, m-1).$$

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ по сегменту $[a,b]$. Разделим сегмент $[a,b]$ точками $\xi_k = a + \frac{b-a}{n}k$, $k = 0,1,\ldots,n$, и поставим интегралу $\int\limits_a^b f(x)dx$ в соответствие функционал $\sum\limits_{k=0}^{n-1} L(\xi_k,\xi_{k+1};f)$:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} L(\xi_k,\xi_{k+1};f).$$

Теорема 3.17 [116]. Если квадратурная формула (3.2) точна для всех многочленов степени $r-1$, то для любой функции f, принадлежащей к классу $W^{(r)}(M;a,b)$, имеет место неравенство

$$\left|\int\limits_b^a f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} L(\xi_k,\xi_{k+1};f)\right| \le \frac{(b-a)^{r+1}c_r M}{n^r}. \tag{3.5}$$

Существует функция f, зависящая от n, принадлежащая классу $W^r(M;a,b)$, для которой неравенство (3.5) является точным.

В дальнейшем неоднократно понадобится следующее утверждение, приведенное в монографии С.М. Никольского [116, стр. 48].

Теорема 3.18. Для любой функции f, принадлежащей классу $W_p^r(M;a,b)$, где $1 < p < \infty$, имеет место неравенство

$$|\int\limits_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} L(\xi_k,\xi_{k+1},f)| \le \frac{(b-a)^{r+1-1/p}C_r^{(q)}M}{n^r},$$

$$C_r^{(q)} = (\int\limits_0^1 |F_r(t)|^q dt)^{1/q},$$

точное в том смысле, что существует функция f_*, принадлежащая к указанному классу, для которой это неравенство обращается в равенство.

Там же указывается, что эта теорема распространяется и на к.ф., использующие значения производных.

Лемма 3.6 [116]. Пусть $\Psi_1 = W_p^r(1)$, $r = 1,2,\ldots$, $1 \le p \le \infty$, $0 \le t \le$

1, $f(t) \in \Psi_1$, квадратурная формула

$$\int_0^1 f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k) + R_n(f)$$

точна для полиномов $r-1$ порядка и имеет погрешность $R_n(\Psi_1)$ на классе Ψ_1. Пусть $\Psi_2 = W_p^r(1)$, $r = 1, 2, \ldots$, $1 \le p \le \infty$, $a \le t \le b$ и $g(t) \in W_p^r(1)$. Тогда квадратурная формула

$$\int_a^b g(t)dt = (b-a)\sum_{k=1}^{n} p_k g(a + (b-a)t_k) + R_n(g)$$

имеет погрешность $R_n(\Psi_2)$ на классе Ψ_2 и $R_n(\Psi_2) = (b-a)^{r+1-1/p} R_n(\Psi_1)$.

Теорема 3.19 [116]. Среди квадратурных формул вида

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{\rho} p_{kl} f^{(l)}(x_k) + R(f) \equiv L(f) + R(f)$$

наилучшей для класса $W^r L_p(1) \quad (1 \le p \le \infty)$ при $\rho = r-1$ ($r = 1, 2, 3, \ldots$), а также при $\rho = r-2 (r = 2, 4, 6, \ldots)$ является единственная формула, определяемая следующими узлами x_k^* и коэффициентами p_{kl}^* :

$$x_k^* = h(2(k-1) + [R_{rq}(1)]^{1/r})\,(k = 1, 2, \ldots, m);$$

$$p_{1l}^* = (-1)^l p_{ml}^* =$$

$$= h^{l+1}\left\{\frac{(-1)^l}{(l+1)!}[R_{rq}(1)]^{(l+1)/r} + \frac{1}{r!}R_{rq}^{(r-l-1)}(1)\right\}\,(l = 0, 1, \ldots, \rho),$$

$$p_{k,2\nu}^* = \frac{2h^{2\nu+1}}{r!}R_{rq}^{(r-2\nu-1)}(1)$$

$$\left(k = 2, 3, \ldots, m-1;\ \nu = 0, 1, \ldots, \left[\frac{r-1}{2}\right]\right),$$

$$p_{k,2\nu+1}^* = 0 \quad \left(k = 2, 3, \ldots, m-1;\ \nu = 0, 1, \ldots, \left[\frac{r-2}{2}\right]\right),$$

где $h = 2^{-1}(m - 1 + [R_{rq}(1)]^{1/r})^{-1})$, а $R_{rq}(t)-$ многочлен вида $t^r + \sum_{i=0}^{r-1}\beta_i t^i$, наименее уклоняющийся от нуля в метрике L_q ($p^{-1} + q^{-1} = 1$) на $[-1, 1]$. При этом

$$R_m[W^r L_p(1)] = R_m[W^r L_p(1); X^*, p^*] =$$

$$= \frac{R_{rq}(1)h^r}{r!\sqrt[q]{rq+1}} = \frac{R_{rq}(1)}{2^r r!\sqrt[q]{rq+1}(m-1+[R_{rq}(1)]^{1/r})^r}.$$

Отметим частные случаи. Если $p = 1 (q = \infty)$, то многочлен $R_{r\infty}(t)$ есть многочлен Чебышева $T_r(t) = 2^{1-r}\cos(r\arccos t)$ и тогда

$$h = \frac{1}{2^{1/r} + 2(m-1)}, \quad R_m[W^r L(1)] = \frac{1}{r![2+(m-1)2^{2-1/r}]^r}.$$

Если $p = q = 2$, то $R_{r2}(t)$ есть многочлен Лежандра $L_r(t)$; при этом

$$h = \left[4\sqrt[r]{\frac{(r!)^2}{(2r)!}} + 2(m-1)\right]^{-1},$$

$$R_m[W^r L_2(1)] = \frac{2}{r!\sqrt{2r+1}}\left[2 + (m-1)\sqrt[r]{\frac{(2r)!}{(r!)^2}}\right]^{-r}.$$

Наконец, в случае $p = \infty$ $(q = 1)$ $R_{r1}(t)$ есть многочлен Чебышева $Q_r(t)$ (второго рода) и тогда

$$h = [2(m-1) + \sqrt[r]{r+1}]^{-1},$$

$$R_m[W^r L_\infty(1)] = \frac{1}{r![4(m-1) + 2\sqrt[r]{r+1}]^r}.$$

Приведенные равенства справедливы для всех $r = 1, 2, 3, \ldots$, если $\rho = r - 1$, и для $r = 2, 4, 6, \ldots$, если $\rho = r - 2$.

В книге будут неоднократно использоваться следующие результаты, принадлежащие В. П. Моторному.

Теорема 3.20 [107]. Пусть при $r = 1, 2, \ldots$, M_m^r есть множество функций $f \in \tilde{W}^r(0, 2\pi)$, имеющих $2m$ экстремумов на периоде $[0, 2\pi)$, производная которых $f^{(r)}(x)$ меняет знак на периоде $2m$ раз, принимая попеременно значения $+1$ или -1. Тогда для любой системы точек $X = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < 2\pi\}$ существует функция $f_X \in M_m^r$, такая, что

$$\min_t f_X(t) = f(x_k) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1)$$

и

$$\int_0^{2\pi} f_X(t)dt \geq \frac{2\pi K_r}{m^r},$$

где K_r- константа Фавара.

Следствие [107]. Справедливо неравенство

$$\inf_X \sup_{f\in\tilde{W}^r_X(0,2\pi)} \int\limits_0^{2\pi} f_X(t)dt \geq \frac{2\pi K_r}{m^r},$$

где $\tilde{W}^r_X(0,2\pi)-$ множество функций, определенных на сегменте $[0,2\pi]$, принадлежащих классу $\tilde{W}^r(1)$ и равных нулю на сетке X.

Теорема 3.21 [116]. Для класса $\tilde{W}^r(1)$ функций, определенных на сегменте $[0,2\pi]$ при любых натуральных r наилучшей квадратурной формулой вида

$$\int\limits_0^{2\pi} f(t)dt = \sum_{k=0}^{m-1} p_k f(x_k) + R(f)$$

или

$$\int\limits_0^{2\pi} f(t)dt = \sum_{k=0}^{m-1} [p_k f(x_k) + p'_k f'(x_k)] + R(f)$$

на произвольном векторе узлов $X = (x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}), 0 \leq x_0 < x_1 < < \cdots < x_{m-1} \leq 2\pi$ для обеих квадратурных формул и произвольном векторе коэффициентов $P = \{p_k\}$ для первой квадратурной формулы или произвольном векторе коэффициентов $P = \{p_k\} \cup \{p'_k\}$ для второй квадратурной формулы является формула

$$\int\limits_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{2\pi}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{2k\pi}{m}\right) + R(f)$$

с равноотстоящими узлами и равными коэффициентами. Погрешность этой формулы равна

$$\sup_{f\in\tilde{W}^r(1)} |R(f)| = \frac{2\pi K_r}{m^r}.$$

Также неоднократно будут использоваться следующие квадратурные формулы.

Теорема 3.22 [116]. Среди квадратурных формул вида

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^{m} p_k f(x_k) + R(f)$$

наилучшей для класса $\tilde{W}^r L_p(1) \quad (1 \le p \le \infty)$ является формула прямоугольников

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f(\frac{k}{m}) + R(f);$$

при этом

$$R_m[\tilde{W}^r L_p(1)] = \frac{1}{m^r}\inf_c \|B_r^*(\cdot) - c\|_{L_q}, \quad (1/p + 1/q = 1).$$

Для $1 < p \le \infty$ наилучшая формула единственная с точностью до жесткого сдвига. Здесь

$$B_r^*(t) = -\frac{r!}{2^{r-1}\pi^r}\sum_{v=1}^{\infty}\frac{1}{v^r}\cos\left(2\pi \mathrm{vt} - \frac{\pi \mathrm{r}}{2}\right).$$

Теорема 3.23 [116]. Среди квадратурных формул вида

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{\rho} p_{kl} f^{(l)}(x_k) + R(f) \equiv L(f) + R(f)$$

наилучшей на классе $\tilde{W}^r L_p(1)$ $(1 \le p \le \infty)$ при $\rho = r - 1$ $(r = 1, 2, \ldots)$ и $\rho = r - 2$ $(r = 2, 4, 6, \ldots)$ является формула

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{2}{r!}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{[\rho/2]}\frac{R_{rq}^{(r-2l-1)}(1)}{(2m)^{2l+1}} f^{(2l)}\left(\frac{k-1}{m}\right) + R_m^{\rho}(f),$$

где $R_{rq}(t)-$ многочлен вида $t^r + \sum\limits_{l=0}^{r-1}\beta_l t^l$, наименее уклоняющийся от нуля в метрике $L_q(1/p + 1/q = 1)$ на сегменте $[-1, 1]$. При этом

$$R_m^{\rho}[\tilde{W}^r L_p(1)] = \frac{R_{rq}(1)}{r!\sqrt[q]{rq+1}(2m)^r}.$$

Рассмотрим множество квадратурных формул типа Эйлера – Маклорена

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = a_0 f(0) + \sum_{k=1}^{m} p_k f(x_k) + b_0 f(1) +$$

$$+\sum_{v=1}^{r-1} a_v[f^{(v)}(1)-f^{(v)}(0)]+R_m(f).$$

Теорема 3.24 [190]. Среди всевозможных формул типа Эйлера – Маклорена точных для полиномов $r-1$ степени наилучшей на классе $W_p^r(1)$ является формула с коэффициентами и узлами $a_0 =$ $= b_0 = 1/2(m+1)$, $p_k = 1/(m+1)$, $x_k = k/(m+1)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, $a_v = \frac{1}{(m+1)^{v+1}} B_{v+1}^*(1)$ $(v = 1, 2, \ldots, r-2)$, $a_{r-1} = \frac{1}{(m+1)^r}[B_r^*(1) - \gamma_{rq}]$, где γ_{rq}– константа наилучшего приближения функции $B_r^*(t)$ в метрике L_q. Погрешность оптимальной формулы Эйлера – Маклорена на классе $W_p^r(1)$ равна $R_m[W_p^r(1)] = \frac{1}{m^r}\inf_c \|B_r^*(t) - c\|_{L_q}$, $1/p + 1/q = 1$, где $B_r^*(t)$– полином Бернулли.

Пусть функция $f(x, y)$ задана на прямоугольнике $D = [a, b; c, d]$. Рассмотрим кубатурную формулу

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} p_{ki} f(x_k, y_i) + R_{mn}(f), \tag{3.6}$$

определяемую вектором (X, Y, P) узлов $a \le x_1 < x_2 < \cdots < x_m \le b$, $c \le y_1 < y_2 < \cdots < y_n \le d$ и коэффициентов p_{ki}.

Теорема 3.25 [90]. Среди квадратурных формул (3.6) оптимальной для классов $H_{\omega_1,\omega_2}(D)$ и $H_\omega(D)$ является формула

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = 4hq\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(a+(2k-1)h, c+(2i-1)q) + R_{mn}(f),$$

где $h = \frac{b-a}{2m}$, $q = \frac{d-c}{2n}$. При этом

$$R_{mn}[H_{\omega_1,\omega_2}(D)] = 4mn[q\int_0^h \omega_1(t)dt + h\int_0^q \omega_2(t)dt];$$

$$R_{mn}[H_\omega(D)] = 4mn\int_0^q\int_0^h \omega(\sqrt{t^2+\tau^2})dtd\tau.$$

Рассмотрим кубатурные формулы вида

$$\int\int_D p(x,y)f(x,y)dxdy = \sum_{k=1}^{N} p_k f(M_k) + R(f), \tag{3.7}$$

где $p(x,y)-$ неотрицательная и ограниченная на D функция, p_k и $M_k(M_k \in D)-$ коэффициенты и узлы.

Теорема 3.26 [6]. Пусть $\rho(x,y)-$ ограниченная неотрицательная весовая функция. Если $R_N[H^{\alpha}_{\rho,j}(D)]$, $j=1,2,3$, $0<\alpha\le 1,-$ погрешность оптимальной для класса $H^{\alpha}_{\rho,j}(D)$ формулы вида (3.7), то

$$\lim_{N\to\infty} N^{\alpha/2} R_N[H^{\alpha}_{\rho,j}(D)] = D_j \left[\int\int\limits_D (p(x,y))^{2/(2+\alpha)} dxdy\right]^{(2+\alpha)/\alpha}, \quad j=1,2,3,$$

где $D_1 = \frac{12}{2+\alpha}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^{(2+\alpha)/\alpha} \int\limits_0^{\pi/6} \frac{d\varphi}{cos^{2+\alpha}\varphi}$, $D_2 = \frac{2^{1-\alpha}}{2+\alpha}$, $D_3 = \frac{2^{1-\alpha/2}}{2+\alpha}$.

Случай $j=2$ распространяется на n-мерные кубатурные формулы.

Замечание. Теорема 3.25 обобщена в [35] на случай неограниченных весов $p(x,y)$.

Обозначим через $l_{n,r,p}(\varphi;[a,b])$ к.ф. с пограничным слоем вида $l_{n,r,p}(\varphi;[a,b]) = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k\varphi(t_k)$, которая асимптотически наилучшим образом аппроксимирует интеграл $\int\limits_a^b \varphi(t)dt$ от функции $\varphi(t)\in W^r_p(1)$, $1<p\le\infty$, $r=1,2,\ldots$ Квадратурные формулы такого вида исследовались В. И. Половинкиным [122] - [125].

Через ${}_{n,r,p}(\varphi^{(l)}(t_j))$ обозначим разностный оператор, который аппроксимирует значения $\varphi^{(l)}(t_j)$ по $r+1$ значению функции $\varphi(t)$ с точностью $An^{-2(r-l)}$, $l=0,1,\ldots,r-1$, причем аппроксимация точна для полиномов степени $r-1$. Операторы вида ${}_{n,r,p}$ построены В. И. Половинкиным [122] $-$ [125].

Обозначим через

$$l^{r,s}_{n_1,n_2}(\varphi;[a,b;c,d]) = \sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=1}^{n_2} p_{k_1k_2}\varphi(t_{k_1,k_2})$$

асимптотически оптимальную на классе $W^{r,s}(1)$ кубатурную формулу (куб.ф.), а через ${}^{r,s}_{m,n}(\varphi^{(k,l)}(t_i,t_j))-$ функционал, аппроксимирующий $\varphi^{(k,l)}(t_i,t_j)$ с точностью $Am^{-2(r-k)}n^{-2(s-l)}$ и точный для полиномов $t_1^v t_2^w$, $v=0,1,\ldots,r-1$, $w=0,1,\ldots,s-1$. Функционалы $l^{r,s}_{n_1,n_2}$ и ${}^{r,s}_{m,n}$ исследованы В. И. Половинкиным. Построим функционалы $l_{n,r,p}(\varphi;[a,b])$ и ${}_{n,r,p}$ способом, отличным от использованного в [122] $-$ [125].

Остановимся вначале на функционале $l_{n,r,p}(\varphi;[a,b])$. Выше было отмечено, что наилучшая на классе $W^rL_p(1)$ квадратурная формула типа Эйлера – Маклорена

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = a_0f(0)+\sum_{k=1}^{m} p_kf(x_k)+b_0f(1)+\sum_{v=1}^{r-1} s_v\left[f^{(v)}(1)-f^{(v)}(0)\right]+R(f)$$

определяется коэффициентами и узлами $a_0=b_0=1/2(m+1)$, $p_k = 1/(m+1)$, $x_k = k/(m+1)$ $(k=1,2,\ldots,m)$, $s_v = \frac{1}{(m+1)^{v+1}}B^*_{v+1}(1)$ $(v=1,2,\ldots,r-2))$, $s_{r-1} = \frac{1}{(m+1)^r}[B^*_r(1)-\gamma_{rq}]$. Здесь γ_{rq}– константа наилучшего приближения функции $B^*_r(t)$ в метрике L_q.

Аппроксимируя производные $f^{(v)}(0)$ и $f^{(v)}(1)$ функционалами ${}_{n,r,p}(f^{(v)}(0))$ и ${}_{n,r,p}(f^{(v)}(1))$ с достаточно малым носителем h, получаем функционал $l_{n,r,p}(\varphi;[0,1])$ вида

$$l_{n,r,p}(f;[0,1]) = a_0f(0)+\sum_{k=1}^{m} p_kf(x_k)+b_0f(1)+$$

$$+\sum_{v=1}^{r-1} s_v\left[{}_{n,r,p}f^{(v)}(1)-{}_{n,r,p}f^{(v)}(0)\right]+R_m(f).$$

Погрешность

$$R_m(f)=R(f)+\sum_{v=1}^{r-1}\left|s_v\left({}_{n,r,p}f^{(v)}(1)-f^{(v)}(1)+\Pi_{n,r,p}f^{(v)}(0)-f^{(v)}(0)\right)\right|.$$

Так как $R(f)=\frac{1}{m^r}\inf_c\|B^*_r(\cdot)-c\|_{L_q}$, $\quad s_v=0\left(\frac{1}{m^{v+1}}\right)$ и как показано ниже, $|{}_{n,r,p}f^{(v)}(k)-f^{(v)}(k)|=0(h^{r-v})$, $\quad k=0,1$, то

$$R_m(f)=\frac{1+o(1)}{m^r}\inf_c\|B^*_r(\cdot)-c\|_{L_q}.$$

Здесь $B^*_r(x)$– полином Бернулли.

Построим функционал ${}_{n,r,p}$. Функцию $f(x)$, определенную на сегменте $[0,h]$, аппроксимируем интерполяционным полиномом $L_r(f)$, использующим $r+1$ узел, расположенный на сегменте $[0,h]$. Такая аппроксимация будет точной для полиномов степени r. Одна из простейших оценок погрешности аппроксимации функции $f(x)\in W^r(1)$ полиномом $L_r(f)$

имеет вид $|f(x)-L_r(f)| \le 6^r h^r \ln r/(r+1)^r$ в случае, если интерполяция проводится по узлам Чебышева. Положим ${}_{n,r,p}(f) = L_r(f)$.

Погрешность аппроксимации функции $f(x)$ полиномами T_n наилучшего равномерного приближения степени n равна $E_n = 6^r h^r/n^r$.

Представим, следуя [112], функцию $f(x) - L_r(f)$ в виде

$$f(x) - L_r(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(T_{2^{k+1}r} - T_{2^k r}) + T_r - L_r.$$

Тогда, воспользовавшись вторым неравенством Бернштейна, на сегменте $[h/4, 3h/4]$ имеем (при $0 \le v < r$)

$$|f^{(v)}(x) - L_r^{(v)}(x)| \le 4^v 6^r h^{r-v} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2^{k+1}r)^v}{(2^k r)^r} + \frac{lnr}{(r+1)^{r-v}} + \frac{1}{(r+1)^{r-v}} \right) =$$

$$= 0(h^{r-v}).$$

Из этой оценки следует, что при $a \in [h/4, 3h/4]$
$|f^{(v)}(a) - {}_{n,r,p}f^{(v)}(a)| \le A(h^{r-v})$, где $h-$ носитель функционала ${}_{n,r,p}$.

Оценим теперь величину $f^{(v)}(x) - L_r^{(v)}(x)$ на концах сегмента [0,1]. При этом ограничимся левым концом. Так как

$$\left(f^{(v)}(x) - L_r^{(v)}(x)\right)|_{x=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(T^{(v)}_{2^{k+1}r}(x) - T^{(v)}_{2^k r}(x)\right)|_{x=0} +$$

$$+ \left(T_r^{(v)}(x) - L_r^{(v)}(x)\right)|_{x=0}, \tag{3.8}$$

то каждое слагаемое $|T^{(v)}_{2^{k+1}r}(x) - T^{(v)}_{2^k r}(x)|$ оценим на сегменте $[0, h_k]$, $h_k = h/(2^{k+1}r)^{2r-1}$. Пользуясь неравенством А.А.Маркова имеем на сегменте $[0, h_k]$

$$|T^{(v)}_{2^{k+1}r}(x) - T^{(v)}_{2^k r}(x)| \le \frac{A(2^k r)^{2v}}{h_k^v} h_k^r \frac{1}{(2^k r)^r} \le \frac{Ah^{r-v}}{(2^k r)^{r+2}}.$$

Из (3.8) следует, что $|f^{(v)}(x) - L_r^{(v)}(x)|_{x=0} \le Ah^{r-v}$.

Оператор ${}_{n,r,p}$ построен.

Пусть $f-$ элемент метрического пространства X; $L, L_1, \ldots, L_N-$ линейные функционалы. Информация о функции f задается вектором $T(f) =$

$(L_1(f), \ldots, L_N(f))$. Через $S(T(f))$ обозначен метод S вычисления функционала $L(f)$ по информации $T(f)$. Погрешность этого метода на множестве функций Ω равна $R(S,T) = \sup_{f\in\Omega} |L(f) - S(T(f))|$. Через $R(T) = \inf_s R(S,T)$ обозначен наилучший для данной информации T метод.

Лемма 3.7 (С.А.Смоляка) [135] (цитируется по [15]). Пусть функционалы $L(f), L_1(f), \ldots, L_N(f)-$ линейные и $\Omega-$ выпуклое центрально-симметричное множество с центром симметрии Q в линейном метрическом пространстве. Пусть $\sup_{f\in\Omega_0} L(f) < \infty$, где $\Omega_0 \equiv$ $\equiv \{f; \quad f \in \Omega, \quad L_k(f) = 0, \quad k = 1, 2, ..., N\}$. Тогда существуют числа $D_1, \ldots, D_N$, такие, что

$$\sup_{f\in\Omega} |L(f) - \sum_{k=1}^{N} D_k L_k(f)| = R(T),$$

т. е. среди наилучших методов есть линейный.

Следствие.

$$R(T) = \sup_{f\in\Omega_0} Lf.$$

3.5. Некоторые обозначения

Опишем обозначения, используемые в книге.

Через $R_{rq}(a;h;x)$ обозначим многочлен вида $x^r + \sum\limits_{i=0}^{r-1} \alpha_i x^i$, такой, что

$$\int\limits_{a-h}^{a+h} |R_{rq}(a;h;x)|^q dx = \min_{\alpha_0,\ldots,\alpha_{r-1}} \int\limits_{a-h}^{a+h} |x^r + \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i x^i|^q dx.$$

Через $R_{rq}(x)$ обозначен полином вида $x^r + \sum\limits_{i=0}^{r-1} \alpha_i x^i$ наименее уклоняющийся от нуля в метрике пространства $L_q[-1,1], \quad 1 \le q \le \infty$.

Пусть $\Delta = [a,b], \quad c \in [a,b]$. Через $T_r(\varphi, \Delta, c)$ обозначен отрезок ряда Тейлора

$$T_r(\varphi, \Delta, c) = \varphi(c) + \frac{\varphi'(c)}{1!}(t-c) + \cdots + \frac{\varphi^{(r)}(c)}{r!}(t-c)^r.$$

Пусть $\Delta = [a_1, b_1; a_2, b_2], \quad c \in \Delta$. Через $T_r(\varphi, \Delta, c)$ обозначим отрезок ряда Тейлора $T_r(\varphi, \Delta, c) = \varphi(c) + \frac{1}{1!} d\varphi(c) + \cdots + \frac{1}{r!} d^r\varphi(c)$.

Пусть $f(t) \in H_\alpha, 0 < \alpha \leq 1, t \in [a,b]$. Тогда

$$H(f,\alpha) = \sup_{t_1 \neq t_2; t_1, t_2 \in [a,b]} \frac{|f(t_1) - f(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha}.$$

4. Обзор приближенных методов вычисления сингулярных интегралов

Сингулярные интегралы различных типов находят широкое применение в многочисленных областях физики и техники: в теории упругости, электродинамике, аэродинамике, ядерной физике. К сингулярным интегралам с фиксированной особенностью вида

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau} \tag{4.1}$$

приводят задачи ядерной физики. Наиболее широкое применение получили сингулярные интегралы с ядрами Коши и Гильберта

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}. \tag{4.2}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \varphi(\sigma) ctg \frac{\sigma - s}{2} d\sigma, \tag{4.3}$$

полисингулярные интегралы

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int_{L} \frac{\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_m) d\tau_1 \cdots d\tau_m}{(\tau_1 - t_1) \cdots (\tau_m - t_m)}, \tag{4.4}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int_{0}^{2\pi} \cdots \int_{0}^{2\pi} \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) ctg \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \cdots ctg \frac{\sigma_m - s_m}{2} d\sigma_1 \ldots d\sigma_m. \tag{4.5}$$

Здесь γ, γ_k, $(k = 1, 2, \ldots, m)-$ единичная окружность с центром в начале координат плоскости комплексной переменной z, z_k, $(k = 1, 2, \cdots, m)$, $L = \gamma_1 \times \gamma_2 \times \cdots \times \gamma_m-$ топологическое произведение

окружностей γ_k. К интегралам (4.2)—(4.5) сводятся многочисленные задачи теории упругости, гравиразведки и магниторазведки. Наряду с интегралами (4.2)—(4.5) широкое применение в теории упругости, аэродинамике, теории автоматического управления, теории оболочек, электродинамике и квантовой механике находят сингулярные интегралы

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t}, \quad t \in (-1, 1), \tag{4.6}$$

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{p(\tau)\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t}, \quad t \in (-1, 1), \tag{4.7}$$

полисингулярные интегралы

$$\int\limits_{-1}^{1} \cdots \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_m)d\tau_1 \cdots d\tau_m}{(\tau_1 - t_1) \cdots (\tau_m - t_m)}, \quad -1 < t_1, \ldots, t_m < 1, \tag{4.8}$$

$$\int\limits_{-1}^{1} \cdots \int\limits_{-1}^{1} \frac{p(\tau_1, \ldots, \tau_m)\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_m)d\tau_1 \cdots d\tau_m}{(\tau_1 - t_1) \cdots (\tau_m - t_m)}, -1 < t_1, \ldots, t_m < 1. \tag{4.9}$$

Здесь $p(\tau)$ и $p(\tau_1, \ldots, \tau_m)$— весовые функции.

Ряд задач упругости и аэродинамики приводит к необходимости вычисления многомерных сингулярных интегралов видов

$$\int\limits_{D} \frac{f(\theta)\varphi(y)dy}{r^n(y)}, \tag{4.10}$$

$$\int\limits_{D} \frac{f(x, \theta)\varphi(y)dy}{r^n(x, y)}, \tag{4.11}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\theta = (x - y)/r(x, y)$,

$$r(y) = \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}, \quad r(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

По-видимому, первой работой, непосредственно посвященной приближенному вычислению интеграла (4.1), является статья В. И. Лебедева и О. В. Бабурина [97], в которой указанный интеграл вычислялся по к.ф.

Гаусса. В статье приведены таблицы весов и узлов формулы Гаусса и дана оценка погрешности вычислений.

Оптимальные по порядку алгоритмы вычисления сингулярных интегралов вида (4.1) на классах H_α, W_p^r построены И. В. Бойковым [24]. В статье И. В. Бойкова [24] предложен метод вычисления интеграла (4.1) на классе $W^r H_\alpha$ $(r = 0, 1, \ldots;\ 0 < \alpha \leq 1)$, требующий $[(\alpha + 1)n \ln n]$ сложений и одно умножение. И. В. Бойковым и
А. К. Руденко [48] построена оптимальная к.ф. типа Маркова на классе $W^1(1)$. В статье И. В. Бойкова [27] приводятся асимптотически оптимальные к.ф. вычисления интеграла (4.1) на классе H_α $(0 < a \leq 1)$. М. Г. Окунь [119] построил оптимальную к.ф. вычисления интеграла (4.1) на классе H_1.

Большое число работ посвящено приближенному вычислению сингулярных интегралов видов (4.2) – (4.11). Подробное изложение основных результатов, полученных по этой тематике до 1968 г., содержится в монографии В. В. Иванова [81], а в период с 1968 по 1995 г. в монографиях И. В. Бойкова [29], [36].

Одним из наиболее широко используемых методов вычисления сингулярных интегралов (4.2) является замена подынтегральной функции более простыми функциями: интерполяционными полиномами, сплайнами, отрезками ряда Фурье, суммами Фейера, Валле-Пуссена, Бернштейна – Рогозинского, Абеля – Пуассона, Чезаро и др. Впервые задача аппроксимации сопряженной функции исследовалась в классических работах А. Н. Колмогорова и С. М. Никольского.

Многочисленные результаты и обширная библиография по методам аппроксимации сопряженных функций приведены в монографиях Н. К. Бари [9] и А. Зигмунда [77], [78].

Дальнейшие результаты, полученные в этом направлении, отражены в монографиях А. И. Степанца [137], [138].

Асимптотически точные оценки приближения сопряженных функций получены А. В. Ефимовым [79], В. А. Ефимовым, В. А. Филимоновой [80], В. А. Филимоновой [153] в случае приближения интерполяционными суммами, В. Г. Филипповским [154] в случае приближения полиномами Рогозинского, Л. П. Фалалеевым [152] в случае приближения полиномами Чезаро, П. В. Задереем, А. И. Степанцом [220] в случае приближения полиномами Фейера.

Эффективный алгоритм вычисления сингулярных интегралов был предложен М. А. Лаврентьевым [96].

Первые работы по построению к.ф. для вычисления интеграла (4.2), основанные на замене подынтегральной функции тригонометрическими интерполяционными полиномами различных типов, принадлежат В. В. Иванову. Им же построены эффективные алгоритмы вычисления интегралов (4.6), (4.7) и предложен общий метод исследования погрешности к.ф. для сингулярных интегралов. Подробно эти результаты описаны в монографии [81].

Ряд работ посвящен построению и исследованию различного вида к.ф., предназначенных для вычисления сингулярных интегралов с ядром Гильберта (4.3) на множестве аналитических периодических функций. Среди этих работ нужно отметить статьи [171], [172].

В монографиях А. Зигмунда [77], [78] построен интерполяционный тригонометрический полином, узлами интерполяции которого являются корни функции $\sin(nt + \alpha)$. Этот полином может быть использован для построения к.ф. вычисления интегралов вида (4.3). В книге Д. Гайера [188] приведены к.ф. указанного типа и оценена их погрешность. Там же приведена обширная библиография по методам вычисления сингулярных интегралов.

Представляет значительный интерес вычисление интегралов вида (4.2) по к.ф. типа Гаусса. Ряд результатов, посвященных этому направлению, изложен в монографии В.В. Иванова [81]. Среди более поздних работ следует упомянуть статьи M.M. Chawla and
N. Jayarajan [170], G. Criscuolo and G. Mastroianni [173], K. Diethelm [179] — [181], [184], D. Elliott [186], D. Elliott and D.F.Paget [187],
W. Gautschi [189], N-A. Gori and E. Santi [191], D.B. Hunter [193],
N.I. Ioakimiadis [197], G.Monegato [204], F. Rabinowitz [206], в которых имеется библиография по к.ф. типа Гаусса для сингулярных интегралов.

Наряду с квадратурными формулами Гаусса большой цикл работ посвящен так называемым модифицированным квадратурным формулам. Рассмотрим, например, интеграл (4.7), который можно представить в

виде

$$K\varphi \equiv \int\limits_{-1}^{1} \frac{p(\tau)\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int\limits_{-1}^{1} p(\tau) \frac{\varphi((\tau) - \varphi(t))}{\tau - t} d\tau + \int\limits_{-1}^{1} p(\tau) \frac{\varphi(t)}{\tau - t} d\tau.$$

Интегралу $K\varphi$ ставится в соответствие модифицированная квадратурная формула

$$K\varphi = Q_n(\varphi, t) + \varphi(t) \int\limits_{-1}^{1} \frac{p(\tau)}{\tau - t} d\tau + R_n(\varphi, t),$$

где $Q_n(\varphi, t)-$ некоторая квадратурная формула, предназначенная для вычисления интеграла

$$\int\limits_{-1}^{1} p(\tau) \frac{(\varphi(\tau) - \varphi(t))}{\tau - t} d\tau.$$

Исследовалась равномерная по t оценка $|R_n(\varphi, t)|$ при различных квадратурных формулах $Q_n(\varphi, t)$.

Мерой качества различных квадратурных формул на классе Ψ является, согласно монографии H. Brab [168], константа Пеано, которая определяется формулой

$$c(t) = \sup_{\varphi \in \Psi} |R_n(\varphi, t)|.$$

Тогда погрешность квадратурной формулы на функции $\varphi \in W^r$ определяется неравенством $|R_n(\varphi, t)| \leq c(t) \|\varphi^r(t)\|$.

Для различных квадратурных формул оценки сверху и снизу констант Пеано получены в работах K. Diethelm [182], H. W. Stole,
R. Straub [217].

В статье [192] построен алгоритм, использующий быстрое преобразование Фурье и требующий $0(n \ln n)$ арифметических действий для вычисления сингулярных интегралов вида (4.3). Следует отметить, что эта возможность была указана в статье В. В. Иванова [82].

Различным методам вычисления сингулярных интегралов (4.6) и (4.7)
А. А. Бабаев, Р. Джуракулов, М. И. Исраилов, Н. В. Кулич,
И. Н. Мелешко, Э. Д. Муратшаева, Б. И. Мусаев, Г. Н. Пыхтеев,

Р. С. Садырханов, В. В. Салаев, Д. Г. Саникидзе, М. А. Шешко, K. Atkinson, G. Criscuolo, C. Dagnino, P. I. Davis, K. Diethelm, D. Elliot, D. B. Hunter, N. I. Ioakimidis, Du Jinyan, J. C. Mason, G. Mastroianni, D. F. Paget, Ph. Rabinowitz, E. Santi, H. W. Stole, R. Straub, P.S. Theocaris, E. Venturino посвятили большие циклы статей, из которых отметим лишь публикации [4], [69], [86] – [88], [108], [109], [127] – [129], [130] – [134], [157], [158], [161], [173] – [176], [177], [180], [194], [195], [199], [200], [203], [206], [207], [212], [217], [218].

Большой интерес представляет исследование равномерной сходимости квадратурных формул вычисления сингулярных интегралов вида (4.6), (4.7) при $-1 < t < 1$.

В случае, когда подынтегральная функция $\varphi(t)$ аппроксимируется ортогональными полиномами, эти вопросы исследовались Д. Г. Саникидзе [131] – [134], [211].

Специальные приемы построения квадратурных формул, равномерно аппроксимирующих по переменной t интегралы (4.6) – (4.8), предложены в работах Ph. Rabinowitz, S. Santi [209], S. Santi [212].

При исследовании метода дискретных вихрей И. К. Лифановым построены эффективные методы вычисления сингулярных интегралов видов (4.2) и (4.6). В книгах С. М. Белоцерковского и И. К. Лифанова [19] и И. К. Лифанова [99] к.ф. метода дискретных вихрей применяются к вычислению как сингулярных интегралов различных видов, так и интегралов Адамара.

Г. Г. Абдулаевой [1] предложен регуляризующий алгоритм вычисления интеграла (4.2) в случае, когда $\varphi(t) \in H_\alpha$ задана приближенно функцией φ из C.

В работах Ф. Стенгера [215], [216] исследовались вопросы вычисления сингулярных интегралов вида (4.6), (4.7) на классах аналитических функций и функций, принадлежащих классам Харди. Получены оценки снизу и сверху величины погрешности к.ф. на указанных классах функций. В монографии И.В. Бойкова [36] эти результаты распространены на более общие классы функций, в том числе на класс функций $H_p^r(1)$, $r = 0, 1, \ldots;\ 1 \le p \le \infty$.

При вычислении полисингулярных интегралов видов (4.4), (4.5), (4.8), (4.9) в первую очередь использовались методы, основанные на замене плотности какими-нибудь более простыми функциями: интерполяцион-

ным полиномом (В. В. Иванов [81], Б. Г. Габдулхаев [59],
М. А. Шешко [158]), сплайнами (Р. Джуракуров, М. И. Исраилов [69]).

При вычислении многомерных интегралов широко используются теоретико-числовые методы. Результаты, полученные в этом направлении, подытожены в монографии Н. М. Коробова [94]. Эти методы распространены на многомерные сингулярные интегралы различных видов в работах И. В. Бойкова [22], [24], [25], [29], М. И. Исраилова и Т. С. Максудова [88], Т. С. Максудова [104].

Исследованию кубатурных формул для вычисления сингулярных интегралов (4.10) посвящены статьи В. А. Волохина [57], P. S. Theocaris, J. G. Kazantzakis [218].

В. Н. Страхов [140] – [142] исследовал различные методы вычисления многомерных интегралов типа потенциала.

Оптимальным методам вычисления подобных интегралов посвящена работа И. В. Бойкова и А. Г. Рамма [165].

В пятидесятые годы прошлого столетия начала развиваться теория оптимальных квадратурных формул. Толчком к этому послужила публикация статей A. Sard [213] и С. М. Никольского [113], [114].

В 1958 г. вышла книга С. М. Никольского "Квадратурные формулы", которая привлекла внимание математиков к построению оптимальных к.ф. Принципиально различные методы построения оптимальных к.ф. предложены Н. С. Бахваловым [11] – [13], [16],
В. И. Крыловым [95], С. М. Никольским [116], С. Л. Соболевым [136], А. Г. Сухаревым [143]. Подробная библиография результатов по оптимальным к.ф. содержится в дополнении Н. П. Корнейчука к монографии С. М. Никольского [116] и в статье А. А. Женсыкбаева [72]. Методы построения оптимальных весовых кубатурных формул разработаны В. И. Половинкиным [122] – [125].

Исследования по оптимальным методам вычисления сингулярных интегралов начаты значительно позже. Первыми работами в этом направлении были статьи В. В. Иванова [82], [83]. В них были построены оптимальные по порядку алгоритмы вычисления сингулярных интегралов вида (4.2) на различных классах функций и асимптотически оптимальный метод вычисления интеграла (4.2) на равноотстоящих узлах. В статье Ю. И. Маковоза и М. А. Шешко [103] опубликована лемма, которая в дальнейшем широко использовалась при исследовании оптимальных по

порядку к.ф. вычисления сингулярных интегралов с переменными особенностями.

В статьях И. В. Бойкова [23] – [25], И. В. Бойкова, А. К. Руденко [48], [49], Б. Г. Габдулхаева [60] построены оптимальные по порядку к.ф. для вычисления интегралов вида (4.2) – (4.6),(4.9).

Следующим этапом в методах вычисления сингулярных интегралов было построение асимптотически оптимальных квадратурных и кубатурных формул вычисления сингулярных, полисингулярных и многомерных сингулярных интегралов.

В работах И. В. Бойкова [25] – [28] построены асимптотически оптимальные методы вычисления сингулярных интегралов видов
(4.2) – (4.4), (4.6) на различных классах функций.

И. В. Бойковым [31], И. В. Бойковым и М. А. Окунем [46] и
М. А. Окунем [119] были построены асимптотически оптимальные алгоритмы вычисления многомерных сингулярных интегралов видов (4.10), (4.11).

Результаты, полученные к 1983 г. по оптимальным по точности алгоритмам вычисления сингулярных интегралов, подытожены в книге И. В. Бойкова [29], а к 1995 г. в его же книге [36].

Позднее в работах И. В. Бойкова и С. Я. Нагаевой [42] – [45],
Ю. Ф. Захаровой [73] – [76] были построены асимптотически оптимальные и оптимальные по порядку пассивные алгоритмы вычисления одномерных, полисингулярных и многомерных сингулярных интегралов с фиксированной и переменной сингулярностями определенных на $E_n, n = 1, 2, \ldots$ Методы, развитые при построении оптимальных алгоритмов вычисления сингулярных интегралов, позднее были распространены на гиперсингулярные интегралы [40], интегралы Дирихле, Пуассона, Шварца [41], [47], типа Коши [39].

Исследования по применению адаптивных алгоритмов к вычислению сингулярных интегралов начаты в работах И. В. Бойкова [32] – [34] и подытожены в его монографии [36].

Результаты по построению оптимальных по сложности (асимптотически оптимальных и оптимальных по порядку) методов вычисления сингулярных и полисингулярных интегралов опубликованы в монографии автора [36].

ГЛАВА 2

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ С ФИКСИРОВАННОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

1. Алгоритмы вычисления на классах $\mathbf{W^rH}_\alpha$

В этом параграфе исследуются методы вычисления сингулярных интегралов вида

$$J\varphi = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau$$

на различных классах функций. В качестве методов вычисления используются к.ф.

$$J\varphi = \sum_{k=-N}^{N}{}' p_k \varphi(t_k) + R_N(t_k, p_k, \varphi), \tag{1.1}$$

$$J\varphi = \sum_{k=-N}^{N}{}' \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl} \varphi^{(l)}(t_k) + R_N(t_k, p_{kl}, \varphi), \tag{1.2}$$

где $-1 \le t_{-N} < \cdots < t_{-1} \le 0 \le t_1 < \cdots < t_N \le 1$, $\sum'$ означает суммирование по $k \ne 0$.

На протяжении второй главы рассматриваются, как правило, симметричные квадратурные формулы, использующие $2N$ или $2N+1$ различный узел. Поэтому для единообразия в обозначениях погрешности таких квадратурных формул обозначаются символом $R_N()$, а не $R_{2N}()$ или $R_{2N+1}()$.

1.1. Асимптотически оптимальные пассивные алгоритмы

1.1.1. Формулировки теорем

Теорема 1.1 [29], [36]. Среди всевозможных к.ф. вида (1.1), использующих $2N$ значений подынтегральной функции, асимптотически оптимальной на классе функций $H_\alpha(1)$ является формула

$$J\varphi = \sum_{k=-N}^{N-1}{}' \varphi(t_k^*) \ln\left(\frac{t_{k+1}}{t_k}\right) + R_N, \tag{1.3}$$

где $t_{\pm k} = \pm(k/N)^{(1+\alpha)/\alpha}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, $t^*_{\pm k} = (t_{\pm k} + t_{\pm k \pm 1})/2$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$, $\sum'$ означает суммирование по $k \neq -1, 0$. Погрешность к.ф. (1.3) равна

$$R_N[H_\alpha(1)] = (1 + o(1))2^{1-\alpha}(1+\alpha)^\alpha/\alpha^{1+\alpha}N^\alpha.$$

Пусть $\varphi(t)-$ функция, определенная на сегменте $[-1, 1]$ и принадлежащая классу W^r. Разобьем сегмент $[-1, 1]$ на более мелкие сегменты $\Delta_k = [v_k, v_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$ точками $-1 = v_0 < v_1 < \cdots < v_N = 1$. На каждом сегменте Δ_k функция $\varphi(t)$ аппроксимируется полиномом

$$\tilde{\varphi}(t, \Delta_k) = \sum_{l=0}^{r-1} \left(\frac{\varphi^{(l)}(v_k)}{l!}(t - v_k)^l + B_{kl}\delta^{(l)}(v_{k+1}) \right),$$

$$\delta(t) = \varphi(t) - \sum_{l=0}^{r-1} \frac{\varphi^{(l)}(v_k)}{l!}(t - v_k)^l,$$

коэффициенты $\{B_{kl}\}$ которого определяются из равенства

$$(v_{k+1} - t)^r - \sum_{l=0}^{r-1} \frac{B_{kl} r!(v_{k+1} - v_k)}{(r-l-1)!}(v_{k+1} - v_k)^{r-l-1} =$$

$$= (-1)^r R_{rq}\left(\frac{v_k + v_{k+1}}{2}, \frac{v_{k+1} - v_k}{2}, t \right).$$

Здесь $R_{rq}(a, h, t)-$ полином вида $t^r + \sum\limits_{l=0}^{r-1} a_l t^l$, наименее уклоняющийся от нуля в метрике $L_q[a-h, a+h]$, $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$.

Теорема 1.2 [29], [36]. Среди всевозможных к.ф. вида (1.2) на классе $W^r(1; [-1, 1])$ при $\rho = r - 1, r = 1, 2, \ldots$, асимптотически оптимальной является к.ф.

$$J\varphi = \sum_{k=1}^{N-1} \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\tilde{\varphi}(\tau, \Delta_k)}{\tau} d\tau + \int_{t_{-k-1}}^{t_{-k}} \frac{\tilde{\varphi}(\tau, \Delta_{-k-1})}{\tau} d\tau \right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!k} \frac{1}{N^{(r+1)/r}}(1 - (-1)^r) + R_N(\varphi), \qquad (1.4)$$

где $t_{\pm k} = \pm(k/N)^{(r+1)/r}$, $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, $\Delta_{-k} = [t_{-k-1}, t_{-k}]$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Погрешность этой к.ф. равна

$$R_N[W^r(1)] = (1+o(1))(r+1)^{r+1}/2^{2r-1}r^{r+1}r!N^r.$$

Теорема 1.3 [29], [36]. Пусть $\Psi = W^r(1;[-1,1])$ и интеграл $J\varphi$ вычисляется по к.ф. вида (1.2) при $\rho = r-2$ и $\rho = r-3$ ($r = 3, 5, \ldots$). Тогда

$$\zeta_N[\Psi] \geq (1+o(1))(r+1)^{r+1}\|R_{r1}\|_L/r^{r+1}r!2^rN^r.$$

1.1.2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1.1. Найдем оценку снизу величины $\zeta_N[H_\alpha(1)]$. Введем функцию

$$\varphi^*(\mathbf{t}) = \begin{cases} 0 & t_{-1} \leq t \leq t_1, \\ \min\limits_k |t-t_k|^\alpha \mathrm{sgn} t & t \notin [t_{-1}, t_1] \end{cases}$$

при $\alpha = 1$ и

$$\varphi^*(\mathbf{t}) = \begin{cases} 0 & t_{-k} \leq t \leq t_k, k = \left[\frac{1+\alpha}{\alpha}2^{2/\alpha-2}\right]+1, \\ \min\limits_l |t-t_l|^\alpha \mathrm{sgn} t & t \notin [t_{-k}, t_k] \end{cases}$$

при $\alpha \neq 1$.

На этой функции погрешность к.ф. (1.1) равна

$$R_N(\varphi^*) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi^*(\tau)}{\tau} d\tau.$$

Из расположения узлов видно, что для оценки $R_N(\varphi^*)$ достаточно ограничиться интегралом $\int\limits_0^1 \tau^{-1}\varphi^*(\tau)d\tau$. Обозначим через M число $[\ln N]$($[\alpha]-$ целая часть числа α) и разобьем сегмент $[0,1]$ на более мелкие сегменты: $\Delta_k = [s_{kM},\ s_{(k+1)M}]$, $k = 0, 1, \ldots, l-1, \Delta_l = [s_{lM}, 1]$. Здесь $s_k = (k/N)^{(1+\alpha)/\alpha}$, $l = [N/M]$, $s_{(l+1)M} = 1$.

Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_0^1 \frac{\varphi^*(\tau)}{\tau} d\tau \geq \sum_{k=1}^{l+1} \frac{1}{s_{kM}} \int\limits_{s_{(k-1)M}}^{s_{kM}} \varphi^*(\tau)d\tau \geq$$

$$\geq \frac{(1+\alpha)^\alpha M^{1+\alpha}}{2^\alpha \alpha^{1+\alpha} N^{1+\alpha}} \sum_{k=1}^{l+1} \left(\frac{k-\theta_k}{k}\right)^{(1+\alpha)/\alpha} \frac{1}{(N_{k-1}+1)^\alpha} \geq$$

$$\geq (1+o(1)) \frac{(1+\alpha)^\alpha M^{1+\alpha}}{2^\alpha \alpha^{1+\alpha} N^{1+\alpha}} \sum_{k=M}^{l} \frac{1}{(N_{k-1}+1)^\alpha}. \qquad (1.5)$$

Здесь $0 < \theta_k < 1$, а N_k- число узлов к.ф. (1.1), расположенных в сегменте Δ_k. При выводе соотношения (1.5) было использовано известное [116] неравенство

$$\min_{x_1,\ldots,x_n} \max_{\varphi \in H_\alpha(1)(x_1,\ldots,x_n)} \int_a^b \varphi(\tau) d\tau \geq \frac{(b-a)^{1+\alpha}}{(1+\alpha)(2(n+1))^\alpha},$$

где $H_\alpha(1)(x_1,\ldots,x_n)-$ класс функций, принадлежащих $H_\alpha(1)$ и обращающихся в нуль в узлах $a, x_1, \ldots, x_n, b$. Осталось найти минимальное значение суммы $\sum_{k=M}^{l}(N_{k-1}+1)^{-\alpha}$. Нам неизвестно, чему равна $\sum_{k=M}^{l} N_{k-1}$, однако совершенно очевидно, что чем больше сумма $\sum_{k=M}^{l} N_{k-1}$, тем меньше сумма $\sum_{k=M}^{l}(N_{k-1}+1)^{-\alpha}$. Поэтому будем искать минимум суммы $V = \sum_{k=M}^{l}(N_{k-1}+1)^{-\alpha}$ при условии $\sum_{k=M}^{l} N_{k-1} = N$. Стандартные методы математического анализа дают возможность обнаружить, что точка $N_{M-1} = N_M = \cdots = N_{l-1} =$
$= N/(l-M+2)$ доставляет минимум сумме V. Следовательно, $V \sim$
$\sim l^{1+\alpha}/N^\alpha$. Подставляя это значение в выражение (1.5), убеждаемся в том, что оценка снизу погрешности к.ф. (1.1) на классе функций $H_\alpha(1)$ не меньше величины, эквивалентной $(1+\alpha)^\alpha 2^{1-\alpha}/(\alpha^{1+\alpha}N^\alpha)$. Оценка снизу получена.

Покажем, что к.ф. (1.2) асимптотически оптимальна. В самом деле,

$$|R_N(\varphi)| \leq \left| \int_{t_{-1}}^{t_1} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(0)}{\tau} d\tau \right| + \sum_{k=-N}^{N-1}{}' \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_k^*)}{\tau} d\tau \right| \leq$$

$$\leq \frac{2t_1^\alpha}{\alpha} + \frac{2^{1-\alpha} N^{(1+\alpha)/\alpha}}{1+\alpha} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(t_{k+1}-t_k)^{1+\alpha}}{k^{(1+\alpha)/\alpha}} = (1+o(1)) \frac{2^{1-\alpha}(1+\alpha)^\alpha}{\alpha^{1+\alpha} N^\alpha}.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.2. При определении верхней грани оценки снизу погрешности к.ф. вида (1.2) используем следующие обозначения: $s_{\pm k} = \pm(k/N)^{(r+1)/r} (k = 0, 1, \ldots, N), M = [\ln N], l =$

$= [N/M], N_k-$ число узлов к.ф. (1.2) в сегменте $\Delta_k = [s_{kM}, s_{(k+1)M}], k = = 0, 1, \ldots, l$, где $s_{(l+1)M} = 1$. Кроме этих, будем еще пользоваться обозначениями $\varphi^+(t) = (\varphi(t) + |\varphi(t)|)/2$, $\varphi^-(t) = (\varphi(t) - |\varphi(t)|)/2$.

При получении оценки снизу можно ограничиться рассмотрением сегмента [0,1]. На этом сегменте построим функцию $\varphi^*(t)$, равную нулю при $t \in [0, s_M]$, принадлежащую классу $W^r(1)$ и обращающуюся в нуль вместе со своими производными до $(r-1)$ порядка включительно в узлах $t_k (k = 1, 2, \ldots, N)$ к.ф. (1.2), расположенных в сегменте $[0, 1]$ и точках $s_{kM} (k = 1, 2, \ldots, l+1)$. Кроме этого, потребуем, чтобы

$$\int\limits_{s_{kM}}^{s_{(k+1)M}} \varphi^*(\tau) d\tau \geq 0, k = 0, 1, \ldots, l.$$

Очевидно,

$$\int\limits_0^1 \frac{\varphi^*(\tau) d\tau}{\tau} \geq \sum_{k=1}^{l} \left[s_{(k+1)M}^{-1} \int\limits_{s_{kM}}^{s_{(k+1)M}} \varphi^*(\tau) d\tau + \right.$$

$$\left. + (s_{kM}^{-1} - s_{(k+1)M}^{-1}) \int\limits_{s_{kM}}^{s_{(k+1)M}} \varphi^{*-}(\tau) d\tau \right] = I_1 + I_2.$$

Из теоремы 3. 19 предыдущей главы следует, что при любом расположении узлов

$$\inf_{p_{kl}} \sup_{\varphi \in W^r(1)} \left| \int\limits_0^1 \varphi(\tau) d\tau - \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=0}^{r-1} p_{kl} \varphi(t_k) \right| \geq$$

$$\geq \frac{1}{r![4(N-1) + 2\sqrt[r]{r+1}]^r}. \tag{1.6}$$

Из следствия леммы С.А.Смоляка, приведенного в главе 1, и теоремы 3. 17 из главы 1 имеем

$$\sup_{\varphi \in W^r(1)(v_1, \ldots, v_{N_k+2})} \int\limits_{s_{kM}}^{s_{(k+1)M}} \varphi(\tau) d\tau \geq$$

$$\geq (s_{(k+1)M} - s_{kM})^{r+1} \inf_{p_{kl}} \sup_{\varphi \in W^r(1)} \left| \int_0^1 \varphi(\tau) d\tau - \sum_{k=1}^{N_k+2} \sum_{l=0}^{r-1} p_{kl} \varphi^{(l)}(v_i) \right|,$$

где v_i— множество, состоящее из узлов к.ф. (1.2), расположенных на сегменте Δ_k, и концов этого сегмента, $\varphi^{(j)}(v_i) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, N_k + 2,\ j = 0, 1, \ldots, r-1$. Присоединяя к этому неравенству неравенство (1.6), имеем оценку

$$\sup_{\varphi \in W^r(1), \varphi^{(j)}(v_i)=0} \int_{s_{kM}}^{s_{(k+1)M}} \varphi(\tau) d\tau \geq \frac{(s_{(k+1)M} - s_{kM})^{r+1}}{r![4(N_k+1) + 2\sqrt[r]{r+1}]^r}.$$

Теперь уже легко оценить сумму I_1 :

$$I_1 = \sum_{k=1}^{l} s_{(k+1)M}^{-1} \int_{s_{kM}}^{s_{(k+1)M}} \varphi^*(\tau) d\tau \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{l} \frac{(s_{(k+1)M} - s_{kM})^{r+1}}{s_{(k+1)M} r![4(N_k+1) + 2\sqrt[r]{r+1}]^r} \geq$$

$$\geq (1 + o(1)) \left(\frac{r+1}{r} \right)^{r+1} \frac{M^{r+1}}{r! N^{r+1}} \sum_{k=M}^{l} \frac{1}{[4(N_k+1) + 2\sqrt[r]{r+1}]^r}. \qquad (1.7)$$

Осталось найти распределение узлов N_k, минимизирующих сумму $V = \sum\limits_{k=M}^{l} 1/[4(N_k+1)+2\sqrt[r]{r+1}]^r$ при условии $\sum_{k=1}^{l} N_k = N$. Эта сумма может быть только уменьшена, если предположить, что

$$N_M + N_{M+1} + \cdots + N_l = N. \qquad (1.8)$$

Теми же рассуждениями, что были сделаны при доказательстве теоремы 1.1, можно показать, что сумма V достигает минимума при условиях (1.8), если $N_M = N_{M+1} = \cdots = N_l = N/(l - M + 1)$. Подставляя эти значения в (1.7), видим, что сумма I_1 не превосходит величину, эквивалентную $(r+1)^{r+1}/4^r r^{r+1} r! N^r$.

Перейдем к оценке I_2 :

$$I_2 = \sum_{k=1}^{l} (s_{kM}^{-1} - s_{(k+1)M}^{-1}) \int_{s_{kM}}^{s_{(k+1)M}} \varphi^{*-}(\tau) d\tau \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{l} \frac{(r+1)N^{(r+1)/r}}{rk^{2+1/r}M^{1+1/r}} \int\limits_{s_{kM}}^{s_{(k+1)M}} \varphi^{*-}(\tau)d\tau.$$

По построению в каждом сегменте $[s_{kM}, s_{(k+1)M}]$ имеется, по крайней мере, по одному узлу, в котором функция $\varphi^*(t)$ вместе с ее производными до $r-1$ порядка обращается в нуль. Возьмем в каждом сегменте по одному такому узлу и обозначим его через $s_k^*, k = 1, 2, \ldots, l$. В сегменте $[s_{kM}, s_{(k+1)M}]$ функция $\varphi^*(t)$ может быть представлена в виде

$$\varphi^*(\tau) = \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_{s_k^*}^{\tau} (\tau - t)^{r-1} \varphi^{*(r)}(t)dt$$

и, следовательно,

$$\left| \int\limits_{s_{kM}}^{s_{(k+1)M}} \varphi^{*-}(\tau)dt \right| \leq \frac{1}{(r+1)!(r+1)} \int\limits_{s_{kM}}^{s_{(k+1)M}} |\varphi^*(\tau)|d\tau \leq \frac{(s_{(k+1)M} - s_{kM})^{r+1}}{(r+1)!}.$$

Поэтому $|I_2| = o(N^{-r})$. Отсюда и из оценки суммы I_1, полученной выше, следует, что верхняя грань оценки снизу не меньше величины, эквивалентной $((r+1)/r)^{r+1}/4^r r! N^r$.

Перейдем к исследованию погрешности к.ф. (1.4). Эта погрешность может быть оценена неравенством

$$|R_N(\varphi)| \leq \left| \int\limits_{t_{-1}}^{t_1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau} - \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!k} t_1^k \left(1 - (-1)^k\right) \right| +$$

$$+2 \left| \sum_{k=1}^{N-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau) - \tilde{\varphi}(\tau, [t_k, t_{k+1}])d\tau}{\tau} \right| = I_3 + I_4. \qquad (1.9)$$

Для оценки I_3 заметим, что

$$I_3 = \left| \int\limits_{t_{-1}}^{t_1} \frac{1}{\tau} \left(\varphi(\tau) - \sum_{k=0}^{r-1} \varphi^{(k)}(0) \frac{1}{k!} \tau^k \right) d\tau \right| =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!} \left| \int\limits_{t_{-1}}^{t_1} \frac{1}{\tau} \left(\int\limits_{0}^{\tau} (\tau - t)^{r-1} \varphi^{(r)}(t)dt \right) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \frac{2}{r!rN^{r+1}} = o(N^{-r}). \tag{1.10}$$

Оценка I_4 следует из цепочки неравенств

$$I_4 = 2\left|\sum_{k=1}^{N-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{\tau}\left(\varphi(\tau) - \tilde{\varphi}(\tau, [t_k, t_{k+1}])\right) d\tau\right| =$$

$$= 2\left|\sum_{k=1}^{N-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{\tau}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{K_r(\tau - t)}{(r-1)!} - \sum_{j=0}^{r-1}\frac{B_{kj}K_{r-j}(t_{k+1}-t)}{(r-1-j)!}\right)\varphi^{(r)}(t)dtd\tau\right| =$$

$$= 2\left|\sum_{k=1}^{N-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi^{(r)}(t)\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{\tau}\left(\frac{K_r(\tau - t)}{(r-1)!} - \sum_{j=0}^{r-1}\frac{B_{kj}K_{r-j}(t_{k+1}-t)}{(r-1-j)!}\right)d\tau dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{2}{r!}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{t_k}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} |(t_{k+1}-t)^r -$$

$$-\sum_{j=0}^{r-1}\frac{r!B_{kj}(t_{k+1}-t_k)}{(r-1-j)!}(t_{k+1}-t)^{r-j-1}\Bigg| dt. \tag{1.11}$$

Известно (см. С.М.Никольский [116, с.157]), что

$$\int\limits_{a-h}^{a+h} |R_{rq}(a,h,x)|^q dx = \frac{2h^{rq+1}[R_{rq}(1)]^q}{rq+1}.$$

Подставляя это значение в (1.11), после несложных преобразований имеем

$$I_4 \leq 4R_{r1}(1)\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{t_k(r+1)!}\left(\frac{t_{k+1}-t_k}{2}\right)^{r+1} \leq$$

$$\leq (1+o(1))\,\frac{(r+1)^{r+1}}{2^{2r-1}r^{r+1}r!N^r}. \tag{1.12}$$

Собирая оценки (1.9), (1.10) и (1.12), видим, что погрешность к.ф. (1.4) есть величина, эквивалентная $((r+1)/r)^{r+1}/2^{2r-1}r!N^r$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.3 аналогично доказательству теоремы 1.2. Отметим лишь изменения, которые необходимо при этом сделать.

Предположим, что в к.ф. (1.2) $\rho = r-2$ или $\rho = r-3$ ($r = 3, 5, 7, \dots$). Как и выше, задача сводится к исследованию неравенства

$$\int\limits_0^1 \frac{\varphi^*(\tau)d\tau}{\tau} \geq \sum_{k=1}^{l} \left[\frac{1}{s_{(k+1)M}} \int\limits_{s_{kM}}^{s_{(k+1)M}} \varphi^*(\tau)d\tau + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{s_{kM}} - \frac{1}{s_{(k+1)M}} \right) \int\limits_{s_{kM}}^{s_{(k+1)M}} \varphi^{*-}(\tau)d\tau \right] = I_1{}' + I_2{}',$$

но здесь под функцией $\varphi^*(\tau)$ понимается функция, обращающаяся в нуль вместе с производными до $r-2$ порядка в узлах t_k к.ф. (1.2), а в точках s_{kM} $(k = 0, 1, \dots, l+1)$ обращается в нуль вместе с производными до $r-1$ порядка. В статье Н.Е.Лушпая [102] показано, что на множестве функций $W^r_{0,1}(1)$, принадлежащих классу $W^r(1)$ и удовлетворяющих условиям $f^{(i)}(0) = f^{(i)}(1) = 0, i = 0, 1, \dots, r-2$ и $f^{(r-1)}(0) = f^{(r-1)}(1)$, погрешность наилучшей к.ф., использующей в узлах значения производной до $r-2$ и $r-3$ порядков включительно, равна $\|R_{r1}\| / \left(r! 2^{r+1}(m+2)^r\right)$. Из доказательства этого утверждения следует, что погрешность наилучшей к.ф. не зависит от величины $f^{(r-1)}(0)$.

Поэтому на основании леммы С.А.Смоляка можно утверждать, что

$$\sup_{f \in W^r(1), f^{(j)}(v_k)=0} \int\limits_0^1 f(\tau)d\tau \geq \frac{\|R_{r1}\|}{r! 2^{r+1}(m+2)^r},$$

где верхняя грань берется по множеству функций, обращающихся в нуль вместе с производными до $r-2$ порядка включительно в любых m узлах, принадлежащих интервалу (0,1) и обращающихся в нуль вместе с производными до $r-1$ порядка включительно на концах интервала. Воспользовавшись последним неравенством и повторяя, теперь уже почти дословно, выкладки первой части теоремы 1.2, убеждаемся в справедливости теоремы 1.3.

1.2. Оптимальные по порядку пассивные алгоритмы

1.2.1. Формулировки теорем

Теорема 1.4 [29], [36]. Пусть $\Psi = W^r(1)$ $(r = 2, 4, \dots)$ и интеграл $J\varphi$ вычисляется по к.ф. вида (1.1). Тогда $\zeta_N[\Psi] \geq (1 + o(1))K_r(r + 1)^{r+1}/2^{r-1}\pi^r r^r N^r$, где K_r- константа Фавара.

Обозначим через N_1 величину $[N/r] + 1$, через Δ_k (Δ_{-k}) сегменты $[s_k, s_{k+1}]$ $([s_{-k-1}, s_{-k}])$, $k = 0, 1, \cdots, N_1$, $s_{\pm k} = \pm(rk/N)^{(r+1)/r}$, $k = 0, 1, \cdots, N_1-1$, $s_{-N_1} = -1$, $s_{N_1} = 1$. Обозначим через $T_r(t, \Delta_k)$ полином Чебышева степени r, наименее отклоняющийся от нуля в равномерной метрике на сегменте Δ_k, а через $x_1^{(k)}, \cdots, x_r^{(k)}$ его корни. Через $P_r(t, \Delta_k)$ обозначим полином, интерполирующий функцию $\varphi(t)$ на сегменте Δ_k по узлам $x_1^{(k)}, \cdots, x_r^{(k)}$. Интеграл $J\varphi$ будем вычислять по к.ф.

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau = \sum_{k=1}^{N_1-1} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{P_r(\tau, \Delta_k)}{\tau} d\tau + \int\limits_{s_{-1}}^{s_1} \frac{P_{2r}(\tau, [s_{-1}, s_1])}{\tau} d\tau +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N_1-1} \int\limits_{s_{-k-1}}^{s_{-k}} \frac{P_k(\tau, \Delta_{-k})}{\tau} d\tau + R_N(\varphi). \tag{1.13}$$

Теорема 1.5 [29], [36]. Среди всевозможных к.ф. вида (1.1) оптимальной по порядку на классе функций $W^r(1)$ $(r = 1, 2, \cdots)$ является формула (1.13) с погрешностью $R_N[W^r(1)] = (r + 1)^{r+1}/r!r2^{2r-1}N^r + o(N^{-r})$.

Обозначим через $T_r(f; [a, b], c)$ полином $T_r(f; [a, b], c) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + ... + \frac{f^{(r-1)}(c)}{(r-1)!}(x - c)^{r-1}$, $c = (a + b)/2$, определенный на сегменте $[a, b]$, и введем к.ф.

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau = \sum_{k=1}^{N_1-1} \left[\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{T_r(\varphi, \Delta_k, s'_k)}{\tau} d\tau + \int\limits_{s_{-k-1}}^{s_{-k}} \frac{T_r(t, \Delta_{-k}, s'_{-k-1})}{\tau} d\tau \right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r-1} \varphi^{(k)}(0) N^{-(r+1)k/r} \frac{(1 - (-1)^k)}{k!k} + R_N(\varphi), \tag{1.14}$$

где $s_{\pm k} = \pm(k/N)^{(r+1)/r}$, $k = 1, 2, \cdots, N$, $s'_k = (s_k + s_{k+1})/2$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, $s'_{-k} = (s_{-k} + s_{-k+1})/2$, $k = 1, \dots, N$.

Теорема 1.6 [29]. Пусть $\Psi = W^r(1)$. Квадратурная формула (1.14) является оптимальной по порядку на классе Ψ среди всевозможных формул вида (1.1). Ее погрешность

$$R_N[\Psi] \le (1+o(1))((r+1)/r)^{r+1}/2^{r-1}(r+1)!N^r.$$

В ряде случаев может оказаться полезной к.ф.

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau = \varphi(t_1) - \varphi(t_{-1}) + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{3}{2} \left[(\varphi(t'_k) - \varphi(t'_{-k})) \ln \frac{k+1}{k} \right] +$$

$$+R_N(\varphi), \tag{1.15}$$

где $t_{\pm k} = \pm(k/N)^{3/2}$, $t'_k = 2(t_{k+1} - t_k)/3\ln((k+1)/k)$, $t'_{-k} = 2(t_{-k-1} - - t_{-k})/3ln((k+1)/k)$, $k = 1, 2, \cdots, N-1$.

Теорема 1.7 [29]. Среди всевозможных к.ф. вида (1.1) формула (1.15) является оптимальной по порядку на классе функций $W^2(1)$ и ее погрешность $R_N[W^2(1)] = (3/2)^2 N^{-2} + o(N^{-2})$.

Опишем несколько к.ф., которые не являются оптимальными по порядку. Первая из них представляет интерес в связи с тем, что при своей реализации требует одного умножения и $O(N \ln N)$ сложений.

Теорема 1.8 [29]. На классе $H_\alpha(1)$ $(0 < \alpha \le 1)$ к.ф.

$$J\varphi = \frac{1}{N} \sum_{k=-M}^{M}{}' \varphi(t_{\pm k}) + R_N(\varphi), \tag{1.16}$$

где $t_{\pm k} = \pm N^{-1/\alpha} e^{k/N}$, $t'_k = (t_{k+1} + t_k)/2$, $t'_{-k} = (t_{-k-1} + t_{-k})/2$, $k = = 1, 2, \cdots, M$, $M = [\alpha^{-1} N \ln N]$, $\sum'$ означает суммирование по $k \ne 0$, имеет погрешность $R_N[H_\alpha(1)] \le 2(\alpha^{-1} N^{-1} e^{\alpha/N} + 2^{-\alpha} \alpha^{-1} N^{-\alpha} + \alpha^{-1} N^{-1-\alpha})$.

Пусть известны значения функции $\varphi(x)$ в узлах $t_{\pm k} = \pm N^{-1/\alpha} e^{k/N}$, $k = 1, 2, \cdots, M$, $M = [(\alpha+1) N \ln N]$. Обозначим через $\bar{\varphi}(t)$ функцию, равную нулю в сегменте $[t_{-1}, t_1]$, $\varphi(t_{-M})$ и $\varphi(t_M)$ в сегментах $[-1, t_{-M}]$ и $[t_M, 1]$ соответственно и являющуюся полигоном, построенным по узлам $t_{\pm k}$ $(k = 1, 2, ..., M)$ при остальных значениях t. Для вычисления интеграла $J\varphi$ можно воспользоваться к.ф.

$$J\varphi = \int\limits_{-1}^{1} \bar{\varphi}(\tau) \tau^{-1} d\tau + R_N(\varphi). \tag{1.17}$$

Теорема 1.9 [29]. На классе $\Psi = W^1H_\alpha(1)$ $(0 < \alpha \le 1)$ к.ф. (1.17) имеет погрешность $R_N[\Psi] \le 2N^{-1-\alpha}(1 + o(N^{-1}))(\max|\varphi'(t)| +$
$+ H(\varphi', \alpha)(1 + \alpha)^{-2})$.

Предположим, что известны значения функции $\varphi(t)$ и ее производных до r-го порядка включительно, в узлах $t_{\pm k} = \pm N^{-(r+\alpha)}e^{k/N}$, $k = 0, 1, \cdots, M$, $M = [(r + \alpha)N \ln N]$. Построим аппроксимирующую функцию $\tilde{\varphi}(t)$. В каждом сегменте $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, $\Delta_{-k} = [t_{-k-1}, t_{-k}]$, функция $\tilde{\varphi}(t)$ является отрезком ряда Тейлора: $T(\varphi, \Delta_k, t_k) = \varphi(t_k) +$
$+ \frac{\varphi'(t_k)}{1!}(\tau - t_k) + \cdots + \frac{\varphi^{(r)}(t_k)}{r!}(\tau - t_k)^r$.

На сегменте $[t_{-1}, t_1]$ функция $\tilde{\varphi}(t)$ равна нулю. Интеграл $J\varphi$ будем вычислять по к.ф.

$$J\varphi = \int_{-1}^{1} \tilde{\varphi}(\tau)\tau^{-1}d\tau + R_N(\varphi). \tag{1.18}$$

Теорема 1.10 [29]. На классе $\Psi = W^1H_\alpha$ $(0 < \alpha \le 1)$ к.ф. (1.18) имеет погрешность $R_N[\Psi] \le 2N^{-r-\alpha}(\max|\varphi^{(r)}(t)| +$
$+ H(\varphi^{(r)}, \alpha)((r + \alpha)r!)^{-1})(1 + o(N^{-1}))$.

1.2.2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1.4. При доказательстве теоремы будут использоваться следующие обозначения: $s_{\pm k} = \pm(kM/N)^{(r+1)/r}$, $k = 1, 2, \cdots, l$, $s_{-l-1} = -1$, $s_{l+1} = 1$, $M = [\ln N]$, $l = [N/M]$, $\varphi^+(t) =$
$= (\varphi(t) + |\varphi(t)|/2$, $\varphi^-(t) = (\varphi(t) - |\varphi(t)|/2$. Пусть $\varphi^*(t)-$ функция, принадлежащая классу $W^r(1)$, равна нулю в узлах к.ф. (1.1) , обращается в нуль вместе с производными до $r - 1$ порядка в точках $s_{\pm k}$
$(k = 0, 1, \cdots, l + 1)$ и тождественно равная нулю на сегменте $[s_{-1}, s_1]$. Нетрудно видеть, что при нахождении оценки снизу можно ограничиться рассмотрением интеграла $\int\limits_0^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau$. Будем считать, что
$\int\limits_0^1 \frac{\varphi^*(\tau)}{\tau}d\tau \ge 0$. Тогда

$$\int_0^1 \frac{\varphi^*(\tau)}{\tau}d\tau \ge \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{s_{k+1}} \int_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi^*(\tau)d\tau + \sum_{k=1}^{l}(s_k^{-1} - s_{k+1}^{-1}) \int_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi^{*-}(\tau)d\tau = I_1 + I_2.$$

Из теорем 3.18, 3.19 главы 1 и следствия леммы С.А. Смоляка вытекает, что

$$\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi^*(\tau)d\tau \geq \frac{K_r(s_{k+1}-s_k)^{r+1}}{(2\pi)^r(N_k+2)^r},$$

где N_k– число узлов квадратной формулы (1.1), попавших на сегмент $[s_k, s_{k+1}]$.

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{l} s_{k+1}^{-1} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi^*(\tau)d\tau \geq$$

$$\geq (1+o(1))K_r(2\pi)^{-r}(M/N)^{((r+1)^2-(r+1))/r}((r+1)/r)^{r+1} \sum_{k=M}^{l}(N_k+2)^{-r}.$$

Минимум суммы $\sum\limits_{k=M}^{l}(N_k+2)^{-r}$ при условии $\sum\limits_{k=M}^{l} N_k = N$ находится так же, как при доказательстве теоремы 1.1. Повторяя приведенные там рассуждения, можно показать, что $\min \sum\limits_{k=M}^{l}(N_k+2)^{-r} \geq$
$\geq (1+o(1))(N/M)^{r+1}$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{l} s_{k+1}^{-1} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi^*(\tau)d\tau \geq (1+o(1))K_r(2\pi N)^{-r}((r+1)/r)^{r+1}.$$

Оценка суммы I_1 получена. Переходя к оценке суммы I_2, заметим, что так как в точке s_k функция $\varphi^*(\tau)$ обращается в нуль со своими производными до $r-1$ порядка включительно, то

$$|\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi^{*-}(\tau)d\tau| \leq \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} |\int\limits_{s_k}^{\tau}(\tau-t)^{r-1}\varphi^{*(r)}(t)dt|d\tau \leq \frac{(s_{k+1}-s_k)^{r+1}}{(r+1)!}.$$

Отсюда

$$|I_2| \leq \sum_{k=1}^{l}|s_k^{-1}-s_{k+1}^{-1}||\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi^{*-}(\tau)d\tau| = o((M/N)^{r+1}\ln l) = o(N^{-r}).$$

Из оценок сумм I_1 и I_2 следует, что верхняя грань оценки снизу погрешности к.ф. вида (1.1) на классе функций $W^r(1)$ не меньше величины, эквивалентной $K_r((r+1)/r)^{r+1}/2^{r-1}\pi^r N^r$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.5. Погрешность к.ф. (1.13) можно представить неравенством

$$|R_N(\varphi)| \le |\sum_{k=1}^{N_1-1} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{\psi_r(\tau,\Delta_k)}{\tau} d\tau| + |\int\limits_{s_{-1}}^{s_1} \frac{\psi_{2r}(\tau,[s_{-1},s_1])}{\tau} d\tau| +$$

$$+|\sum_{k=1}^{N_1-1} \int\limits_{s_{-k-1}}^{s_{-k}} \frac{\psi_r(\tau,\Delta_{-k})}{\tau} d\tau| = I_1 + I_2 + I_3, \qquad (1.19)$$

где $\psi_r(\tau,\Delta_k) = \varphi(\tau) - P_r(\tau,\Delta_k)$. Так как суммы I_1 и I_3 оцениваются одинаково, то ограничимся рассмотрением первой из них. Известно (см. параграф 3 главы 1), что на классе $W^r(1)$ погрешность интерполяционной формулы $|f(\tau) - P_r(\tau,[-1,1])| \le 1/(2^{r-1}r!)$. Поэтому

$$|\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} (\varphi(\tau) - P_r(\tau,\Delta_k)) d\tau| \le \left(\frac{s_{k+1}-s_k}{2}\right)^{r+1} \frac{1}{2^{r-1}r!}. \qquad (1.20)$$

Несложные арифметические выкладки позволяют получить оценку $|I_1| \le (r+1)^{r+1}/r!r4^rN^r + o(N^{-r})$.

Нетрудно видеть, что

$$|I_2| = |\int\limits_{s_{-1}}^{s_1} \frac{\psi_{2r}(\tau,[s_{-1},s_1]) - \psi_{2r}(0,[s_{-1},s_1])}{\tau} d\tau| \le$$

$$\le 2\left(\frac{r}{N}\right)^{(r+1)/r} |\psi'_{2r}(\theta s_1,[s_{-1},s_1])| \le 4^2r^3\left(\frac{r}{N}\right)^{r+1} = o(N^{-r}).$$

Из полученных оценок имеем $R_N[W^r(1)] \le (r+1)^{r+1}/r!r2^{2r-1}N^r + +o(N^{-r})$. Справедливость доказанной теоремы следует из сопоставления этой оценки с оценкой снизу, приведенной в теореме 1.3.

Доказательство теоремы 1.6. Это доказательство принципиально не отличается от доказательства предыдущей теоремы. Отличие состоит

лишь в замене в неравенстве (1.19) выражения $\psi(\tau, \Delta_k)$ на выражение $\varphi(\tau) - T_r(\tau, \Delta_k)$ и использовании вместо неравенства (1.20) неравенства

$$\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} |\varphi(\tau) - T_r(\tau, \Delta_k, s'_k)| d\tau \leq$$

$$\leq \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} | \int\limits_{(s_k+s_{k+1})/2}^{\tau} (\tau - t)^{r-1} \varphi^{(r)}(t) dt | d\tau \leq \frac{(s_{k+1} - s_k)^{r+1}}{2^r (r+1)!}.$$

Доказательство теоремы 1.7. Справедливость теоремы следует из легко проверяемого утверждения, что к.ф. (1.15) точна для полиномов первой степени. В самом деле, с точностью $o(N^{-r})$

$$|R_N(\varphi)| = \sum_{k=-N}^{N-1}{}' | \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t'_k)}{\tau} d\tau | \leq 2 \sum_{k=1}^{N-1} | \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t'_k)}{\tau} d\tau | =$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{N-1} | \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t'_k) - \varphi'(t'_k)(\tau - t'_k)}{\tau} d\tau | \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N-1} | \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi''(t'_k + \theta(\tau)(\tau - t'_k))(\tau - t'_k)^2}{\tau} d\tau | \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N-1} \left[\int\limits_{t'_k}^{t_{k+1}} \frac{(\tau - t'_k)^2}{\tau} d\tau + \int\limits_{t_k}^{t'_k} \frac{(\tau - t'_k)^2}{\tau} d\tau \right] = I_1 + I_2.$$

Проведя несложные, но достаточно громоздкие выкладки, имеем $I_1 + I_2 \leq 2(1 + o(1))3^2/2^3 N^2$ и, следовательно, $R_N[W^2(1)] \sim (3/2N)^2$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.8. Погрешность к.ф. (1.16) оценивается неравенством

$$|R_N(\varphi)| \leq | \int\limits_{t_{-1}}^{t_1} \varphi(\tau) \tau^{-1} d\tau | + | \sum_{k=1}^{M-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} (\varphi(\tau) - \varphi(t'_k)) \tau^{-1} d\tau | +$$

$$+|\sum_{k=1}^{M-1}\int\limits_{t_{-k-1}}^{t_{-k}}(\varphi(\tau)-\varphi(t'_{-k}))\tau^{-1}d\tau|+|\int\limits_{t_M}^{1}\varphi(\tau)\tau^{-1}d\tau+\int\limits_{-1}^{t_{-M}}\varphi(\tau)\tau^{-1}d\tau|=$$

$$=I_1+\cdots+I_4.$$

Оценим каждое из слагаемых I_1-I_4 в отдельности:

$$I_1=|\int\limits_{t_{-1}}^{t_1}(\varphi(\tau)-\varphi(0))\tau^{-1}d\tau|\le 2H(\varphi,\alpha)e^{\alpha/N}N^{-1},$$

$$I_2\le 2^{-\alpha}N^{-1}H(\varphi,\alpha)\sum_{k=1}^{M-1}(t_{k+1}-t_k)^{\alpha}\le H(\varphi,\alpha)/2^{\alpha}\alpha N^{\alpha},$$

$$I_3\le H(\varphi,\alpha)/2^{\alpha}\alpha N^{\alpha},$$

$$I_4=|\int\limits_{t_M}^{1}(\varphi(\tau)-\varphi(0))\tau^{-1}d\tau+\int\limits_{-1}^{t_{-M}}(\varphi(\tau)-\varphi(0))\tau^{-1}d\tau|\le 2H(\varphi,\alpha)/\alpha N^{1+1/\alpha}.$$

Объединяя эти неравенства, убеждаемся в справедливости теоремы.

Доказательство теоремы 1.9. Погрешность к.ф. (1.17) оценивается неравенством

$$|R_N(\varphi)|\le|\int\limits_{t_{-1}}^{t_1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau|+\int\limits_{t_1}^{1}\frac{|\varphi(\tau)-\bar{\varphi}(\tau)|}{\tau}d\tau+\int\limits_{-1}^{t_{-1}}\frac{|\varphi(\tau)-\bar{\varphi}(\tau)|}{|\tau|}d\tau=$$

$$=I_1+I_2+I_3.$$

Оценим каждое из слагаемых I_1-I_3 в отдельности:

$$I_1=|\int\limits_{t_{-1}}^{t_1}(\varphi(\tau)-\varphi(0))\tau^{-1}d\tau|\le e^{1/N}N^{-1-\alpha}\max|\varphi'(t)|;$$

$$I_2\le\sum_{k=1}^{M}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}|\varphi(\tau)-\bar{\varphi}(\tau)|\tau^{-1}d\tau\le\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{M}\max_{t_k\le\tau\le t_{k+1}}\int\limits_{t_k}^{\tau}(\varphi'(v)-\varphi'(\xi_k))dv\le$$

$$\leq (1+\alpha)^{-1}N^{-1}H(\varphi',\alpha)\sum_{k=1}^{M}(t_{k+1}-t_k)^{1+\alpha}\leq$$

$$\leq (1+o(N^{-1-\alpha}))(1+\alpha)^{-2}N^{-1-\alpha}H(\varphi',\alpha);$$

$$I_3\leq (1+o(N^{-1-\alpha}))(1+\alpha)^{-2}N^{-1-\alpha}H(\varphi',\alpha).$$

Из полученных оценок следует справедливость теоремы.

Доказательство теоремы 1.10. Погрешность к.ф. (1.18) оценивается неравенством

$$|R_N(\varphi)|\leq |\int\limits_{t_{-1}}^{t_1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau|+\int\limits_{t_1}^{1}\frac{|\varphi(\tau)-\tilde{\varphi}(\tau)|}{\tau}d\tau+\int\limits_{-1}^{t_{-1}}\frac{|\varphi(\tau)-\tilde{\varphi}(\tau)|}{|\tau|}d\tau=$$

$$=I_1+I_2+I_3.$$

Оценим каждое из этих слагаемых в отдельности:

$$I_1=|\int\limits_{t_{-1}}^{t_1}(\varphi(\tau)-\varphi(0))\tau^{-1}d\tau|\leq 2N^{-r-\alpha}\max|\varphi'(t)|,$$

$$I_2\leq\sum_{k=1}^{M}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}|\varphi(\tau)-\tilde{\varphi}(\tau)|\tau^{-1}d\tau\leq\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{M}\max_{t_k\leq\tau\leq t_{k+1}}|\varphi(\tau)-\tilde{\varphi}(\tau)|=$$

$$=\frac{1}{N(r-1)!}\sum_{k=1}^{M}\max_{t_k\leq\tau\leq t_{k+1}}|\int\limits_{t_k}^{\tau}(\tau-t)^{r-1}(\varphi^{(r)}(t)-\varphi^{(r)}(t_k))dt|\leq$$

$$\leq\frac{H(\varphi^{(r)},\alpha)}{N(r-1)!}\sum_{k=1}^{M}(t_{k+1}-t_k)^{\alpha}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}(t_{k+1}-t)^{r-1}dt=\frac{\left(1+o\left(\frac{1}{N}\right)\right)H(\varphi^{(r)},\alpha)}{(r+\alpha)r!N^{r+\alpha}},$$

$$I_3\leq\frac{(1+o(N^{-1}))H(\varphi^{(r)},\alpha)}{(r+\alpha)r!N^{r+\alpha}}.$$

Из полученных неравенств следует справедливость теоремы.

1.3. Устойчивость пассивных алгоритмов

При вычислении интеграла $J\varphi$ по к.ф. вида (1.1) может оказаться, что значения $\varphi(t_k)$ заданы с некоторой погрешностью ε. Возникает задача построения оптимальной к.ф. при условии, что вместо точных значений $\varphi_v = \varphi(t_v)$ задан вектор

$$I_N = (\tilde{\varphi}_1, \cdots, \tilde{\varphi}_N),$$

где $|\tilde{\varphi}_v - \varphi_v| \leq \varepsilon$, $v = 1, 2, \cdots, N$.

Аналогичная задача возникает и при исследовании к.ф. вида (1.2). Здесь нужно предположить, что с погрешностью заданы не только значения функций, но и значения их производных до ρ порядка включительно, т.е. вместо векторов $I_N^{(k)} = (\varphi_1^{(k)}, \cdots, \varphi_N^{(k)})$ заданы векторы $\tilde{I}_N^{(k)} = (\tilde{\varphi}_1^{(k)}, \cdots, \tilde{\varphi}_N^{(k)})$, где $|\tilde{\varphi}_v^{(k)} - \varphi_v^{(k)}| \leq \varepsilon_k$. Еще одним источником погрешности при использовании к.ф. (1.1) и (1.2) являются неточности в вычислении коэффициентов p_k и p_{kl}.

1.3.1. Формулировки теорем

Теорема 1.11 [29]. Верхняя грань оценки снизу погрешности к.ф. вида (1.1) на классе $H_\alpha(1)$ при задании вектора $I_N = (\varphi(t_1), \cdots, \varphi(t_N))$ с погрешностью $0 < \varepsilon < 1$ не меньше величины, эквивалентной $(1 - \varepsilon^{1/(1+\alpha)})^{1+\alpha} 2^{1-\alpha}(1+\alpha)^\alpha/\alpha^{1+\alpha}N^\alpha + 2\varepsilon(|\ln\varepsilon| + 1)/\alpha$.

Теорема 1.12 [29]. Пусть $\Psi = H_\alpha(1)$. Квадратурная формула (1.3) при задании вектора I_N с точностью ε имеет погрешность $|R_N| \leq (1 + o(1))2^{1-\alpha}(1+\alpha)^\alpha/\alpha^{1+\alpha}N^\alpha + 2\varepsilon\alpha^{-1}(1+\alpha)\ln N + O(N^{-1-\alpha})$.

Предположим теперь, что $\varepsilon = O(N^{-\alpha})$. Это требование представляется естественным, так как в противном случае величина погрешности, внесенная неточностью заданной исходной информации, больше погрешности, обусловленной к.ф., и увеличение N не оказывает существенного влияния на точность вычисления.

Теорема 1.13 [29]. Квадратурная формула

$$J\varphi = \sum_{k=-N}^{N-1}{}^{*}\varphi(t'_k)\ln\left(\frac{t_{k+1}}{t_k}\right) + R_N(\varphi), \tag{1.21}$$

где $t_{\pm k} = \pm(k/N)^{(1+\alpha)/\alpha}$; $t'_{\pm k} = (t_{\pm k} + t_{\pm k+1})/2$; $\sum^*$ означает суммирование по $k\bar{\in}[-k^*, k^*]$; $k^* = [N\varepsilon^{1/(1+\alpha)}]$; $[v]-$ антье v, имеет при задании

вектора I_N с точностью ε погрешность $|R_N| \le 2\varepsilon(|\ln\varepsilon|+1)/\alpha+2^{1-\alpha}(1+$ $+\alpha)^\alpha(1+(1+\alpha)N^{-1}\ln N)/\alpha^{1+\alpha}N^\alpha$.

Коэффициенты p_k к.ф. (1.3) могут быть вычислены с некоторой погрешностью ε. Следующие теоремы устанавливают связь погрешности к.ф. (1.3) с погрешностью задания весов p_k.

Теорема 1.14 [29]. Пусть $\Psi = H_\alpha(1)$. Если коэффициенты $p_k =$ $= \ln(t_{k+1}/t_k)$ вычисляются с точностью ε, то верхняя грань погрешности к.ф. (1.3) равна бесконечности.

Теорема 1.15 [29]. Пусть $\Psi = H_\alpha(1)$. Если коэффициенты $p_k =$ $= \ln(t_{k+1}/t_k)$ вычисляются с точностью ε, то к.ф.

$$J\varphi = \sum_{k=-N}^{N-1}{}''(\varphi(t'_k)-\varphi(0))\ln(t_{k+1}/t_k) + R_N(\varphi), \tag{1.22}$$

где $\sum''$ означает суммирование по $k \ne -1, 0$, имеет погрешность

$$|R_N| \le 2^{1-\alpha}(1+\alpha)^\alpha/\alpha^{1+\alpha}N^\alpha + 2\varepsilon N/(2+\alpha).$$

1.3.2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1.11. Найдем верхнюю грань оценки снизу погрешности к.ф. вида (1.1) при условии, что вместо вектора I_N задан вектор $\tilde{I}_N$. Введем функцию $\tilde{\varphi}^*(t) = \varphi^*(t) + (\mathrm{sgn t})\min(|\mathrm{t}|^\alpha, \varepsilon)$, где $\varphi^*(t)-$ функция, определенная формулой

$$\varphi^*(t) = \begin{cases} 0, & -\mathrm{v} \le \mathrm{t} \le \mathrm{v},\ \mathrm{v} = \min\limits_{\mathrm{k}} \mathrm{v_k}, \\ & v_k \in (t_k : t_k \ge \varepsilon^{1/\alpha}), \\ & \min\limits_k |t-t_k|^\alpha \mathrm{sgn\ t}, \quad \mathrm{t}. \end{cases}$$

Погрешность к.ф. (1.1) на векторах $\tilde{I}_N$ не меньше величины интеграла $\mathcal{J}\tilde{\varphi}^*$. Ограничимся оценкой интеграла

$$\int_0^1 \tau^{-1}\tilde{\varphi}^*(\tau)d\tau = \int_0^1 \tau^{-1}\varphi^*(\tau)d\tau + \int_0^1 \tau^{-1}(\min(\tau^\alpha, \varepsilon))d\tau.$$

Первое слагаемое, по сути дела, было оценено в разделе 1.1.2. Легко показать, что

$$\int_0^1 \tau^{-1}\varphi^*(\tau)d\tau \ge (1+o(1))(1-\varepsilon^{1/(1+\alpha)})^{1+\alpha}(1+\alpha)^\alpha/2^\alpha\alpha^{1+\alpha}N^\alpha,$$

$$\int\limits_0^1 \tau^{-1}(\min(\tau^\alpha, \varepsilon))d\tau = \varepsilon(|\ln\varepsilon| + 1)/\alpha.$$

Таким образом, верхняя грань оценки снизу погрешности к.ф. вида (1.1) есть величина, эквивалентная

$$(1 - \varepsilon^{1/(1+\alpha)})^{1+\alpha}(1+\alpha)^\alpha 2^{1-\alpha}/\alpha^{1+\alpha}N^\alpha + 2\varepsilon(|\ln\varepsilon| + 1)/\alpha.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.12. Определим погрешность к.ф. (1.3) в предположении, что вместо вектора I_N задан вектор $\tilde{I}_N$. Погрешность этой формулы может быть представлена выражением

$$|R_N(\varphi)| \le |\int\limits_{t_{-1}}^{t_1} \tau^{-1}(\varphi(\tau) - \varphi(0))d\tau| + \sum_{k=-N}^{N-1}{}''|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \tau^{-1}(\varphi(\tau) - \tilde{\varphi}(t'_k))d\tau| \le$$

$$\le \frac{2t_1^\alpha}{\alpha} + 2\varepsilon|\ln t_1| + 2^{1-\alpha}\sum_{k=-N}^{N-1}{}''\left(\frac{N}{k}\right)^{(1+\alpha)/\alpha}\frac{(t_{k+1}-t_k)^{(1+\alpha)}}{1+\alpha} =$$

$$= 2^{1-\alpha}(1+\alpha)^\alpha\frac{(1+o(1))}{\alpha^{1+\alpha}N^\alpha} + 2\varepsilon(1+\alpha)\frac{1}{\alpha}\ln N + o\left(\frac{1}{N^{1+\alpha}}\right).$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.13. Погрешность к.ф. (1.21) в предположении, что вместо вектора I_N задан вектор $\tilde{I}_N$, может быть представлена в виде

$$|R_N(\varphi)| \le \int\limits_{t_{-k^*}}^{t_{k^*}} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(0)}{\tau}d\tau + \sum_{k=-N}^{N-1}{}^*|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau) - \tilde{\varphi}(t'_k)}{\tau}d\tau| = I_1 + I_2.$$

Из определения k^* следует, что $I_1 \le 2\varepsilon/\alpha$,

$$I_2 \le 2\varepsilon\alpha^{-1}|\ln\varepsilon| + 2^{1-\alpha}\sum_{k=k^*}^{N-1}(N/k)^{(1+\alpha)/\alpha}(t_{k+1}-t_k)^{(1+\alpha)}/(1+\alpha) \le$$

$$\le \frac{2\varepsilon}{\alpha}|\ln\varepsilon| + \frac{2^{1-\alpha}(1+\alpha)^\alpha}{(\alpha N)^{1+\alpha}}(N - 1 - [N\varepsilon^{1/(1+\alpha)}])(1 + (1+\alpha)N^{-1}\ln N).$$

Поэтому

$$|R_N(\varphi)| \le 2\varepsilon(|\ln\varepsilon|+1)\alpha^{-1}+(1+\alpha)^{\alpha}2^{1-\alpha}(1+(1+\alpha)N^{-1}\ln N)/N^{1+\alpha}\alpha^{1+\alpha}.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.14. Коэффициент $p_k = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \tau^{-1}d\tau$. Поэтому, если вместо p_k задано значение $\tilde{p}_k$, удовлетворяющее равенству $|p_k - \tilde{p}_k| = \varepsilon$, то это можно трактовать как равенство $\tilde{p}_k =$
$= \int\limits_{\tilde{t}_k}^{\tilde{t}_{k+1}} \tau^{-1}d\tau$, где $\tilde{t}_{k+1}$ и $\tilde{t}_k$ подбирается таким образом, что $|p_k - \tilde{p}_k| = \varepsilon$. Предположим теперь, что функция $\varphi(t) \ge M > 0$ на сегменте $[-1,1]$, а веса $\tilde{p}_k$ таковы, что $\tilde{p}_k < p_k$ при всех значениях k. Тогда

$$|R_N(\varphi)| = \left|\int\limits_{-1}^{1} \tau^{-1}\varphi(\tau)d\tau - \sum_{k=-N}^{N-1}{}''\varphi(t'_k)\ln(t_{k+1}/t_k)\right| +$$

$$+\left|\sum_{k=-N}^{N-1}{}''\varphi(t'_k)(\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \tau^{-1}d\tau - \int\limits_{\tilde{t}_k}^{\tilde{t}_{k+1}} \tau^{-1}d\tau)\right| = I_1 + I_2.$$

Модуль выражения I_1 оценивался при доказательстве теоремы 1.1, где было показано, что $|I_1| \le (1+o(1))2^{1-\alpha}(1+\alpha)^{\alpha}/\alpha^{1+\alpha}N^{\alpha}$. Из условия $\tilde{p}_k < p_k$ и очевидных неравенств $p_k > 0$ при $k \ge 1$ и $p_k < 0$ при $k \le -2$ следует, что $I_2 \ge MN\varepsilon$. Так как величина M может быть выбрана как угодно большой, то на классе $\Psi = H_\alpha(1)$ верхняя грань погрешности к.ф. (1.3) равна бесконечности. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.15. Погрешность к.ф. (1.22) можно оценить неравенством

$$|R_N(\varphi)| \le |\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\tau}\varphi(\tau)d\tau - \sum_{k=-N}^{N-1}{}''\varphi(t'_k)\ln\left(\frac{t_{k+1}}{t_k}\right)| +$$

$$+|\sum_{k=-N}^{N-1}{}''(\varphi(t'_k)-\varphi(0))(p_k-\tilde{p}_k)| = I_1 + I_2.$$

Выражение I_1 было оценено при доказательстве теоремы 1.1. Перейдем к рассмотрению суммы I_2:

$$I_2 \leq \sum_{k=-N}^{N-1} {}''|t'_k|^\alpha \varepsilon \leq 2\varepsilon \sum_{k=1}^{N} t_k^\alpha \leq \frac{2\varepsilon N}{2+\alpha}.$$

Из оценок для I_1 и I_2 следует справедливость теоремы.

1.4. Математическое ожидание величины погрешности квадратурных формул

При вычислении интегралов в смысле Римана нашли широкое применение недетерминированные методы [12], [13]. Представляет интерес их распространение на сингулярные интегралы. При этом оказывается полезным следующий результат Н.С. Бахвалова [12]. В упомянутой выше статье Н.С. Бахвалова исследована задача:

пусть дан класс функций $f_j(n)$ $(n = 1, 2, \cdots, 2N)$, принимающих значение ± 1, и требуется вычислить среднее арифметическое какой-либо функции из рассматриваемого класса: $s_j = (2N)^{-1} \sum\limits_{n=1}^{2N} f_j(n)$.

Лемма Н.С. Бахвалова. При любом недетерминированном способе вычисления среднеарифметического, когда используется информация о значениях функции не более чем в N точках, для некоторой функции рассматриваемого класса среднее значение модуля ошибки не менее чем $c_0 N^{-1/2}$, где c_0- абсолютная константа.

Теорема 1.16 [29]. Пусть $\Psi = W^r H_\alpha(1)$, $r = 1, 2, \cdots$, $0 < \alpha \leq 1$. Если при вычислении интеграла $J\varphi$ используется не более N значений подынтегральной функции в каждом из сегментов $[-1, 0]$, $[0, 1]$, то для любого недетерминированного способа вычислений среднее значение модуля погрешности вычислений для некоторой функции $f \in \Psi$ не меньше $O(N^{-r-\alpha-1/2})$.

Доказательство теоремы 1.16. Разобьем сегмент $[-1, 1]$ на части точками $s_{\pm k} = \pm(k/2N)^{(r+1+\alpha)/(r+\alpha)}$, $k = 0, 1, \cdots, 2N$. Через Δ_k, Δ_{-k} $(k = 0, 1, \cdots, 2N-1)$ обозначим сегменты $[s_k, s_{k+1}]$, $[s_{-k-1}, s_{-k}]$. В каждом сегменте Δ_k построим функцию $\varphi_k(\tau) = A(s_{k+1} - s_k)^{-r-\alpha}[(\tau - s_k)(s_{k+1} - \tau)]^{r+\alpha}$, где константа A подбирается из требования, чтобы $\varphi_k(\tau) \in W^r H_\alpha(1)$. Нетрудно видеть, что такая константа существует и

может быть выбрана независимо от длины сегмента Δ_k. Найдем значение

$$\delta = \min_k \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{1}{\tau}\varphi_k(\tau)d\tau \geq$$

$$\geq A\left[\frac{r+1+\alpha}{r+\alpha}\right]^{r+1+\alpha} \frac{1}{N^{r+1+\alpha}(r+1+\alpha)2^{2r+1+2\alpha+1/(r+\alpha)}} = A^*.$$

Построим теперь на каждом сегменте Δ_k функцию $\psi_k^*(\tau) \in W^r H_\alpha(1)$, такую, что $\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \tau^{-1}\psi_k^*(\tau)d\tau = A^*$. Это нетрудно сделать, полагая $\psi_k^*(\tau) = 0$ при $s_k \leq \tau \leq v_k$, $\psi_k^*(\tau) = A(s_{k+1}-v_k)^{-r-\alpha}[(\tau - v_k)(s_{k+1}-\tau)]^{r+\alpha}$ при $v_k \leq \tau \leq s_{k+1}$ и подбирая соответствующим образом v_k. Введем функцию $f_j(\tau)$ таким образом, чтобы на каждом сегменте Δ_k $f_j(\tau) = \pm\tau^{-1}\psi_k^*(\tau)$. Тогда $\int_{\Delta_k} f_j(\tau)d\tau = \pm A^*$. Обозначим через $A_j^*(n)$ функцию, принимающую значения $\pm A^*$. Имеем
$\int\limits_{-1}^{1} f_j(\tau)d\tau = \sum\limits_{k=-2N}^{2N-1} A^*(k) = 4N[(\sum\limits_{k=-2N}^{2N-1} A^*(k))/4N] = 4Ns_j(4N)$,
где $s_j(4N) = (\sum\limits_{k=-2N}^{2N-1} A^*(k))/4N$.

Из леммы Н.С. Бахвалова следует, что для некоторой функции $f_j(\tau)$ среднее значение модуля ошибки не менее величины $O(N^{-(r+\alpha+1/2)})$. Теорема доказана.

2. Алгоритмы вычисления на классах $\mathbf{W_p^r}$

2.1. Оптимальные пассивные алгоритмы

2.1.1. Формулировки теорем

Сингулярный интеграл $J\varphi = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(\tau)\tau^{-1}d\tau$ будем вычислять по к.ф.

$$J\varphi = \sum_{k=-N}^{N}{}' p_k\varphi(t_k) + R_N(t_k, p_k, \varphi), \tag{2.1}$$

где $-1 \leq t_{-N} < \cdots < t_{-1} \leq 0 \leq t_1 < \cdots < t_N \leq 1$, $\sum'$ означает суммирование по $k \neq 0$.

Квадратурную формулу (2.1) будем рассматривать на классе $W^1(1)$ при двух предположениях: а) $t_{-N} = -1$, $t_N = 1$, т.е. (2.1)– формула типа Маркова; б) $t_{-N} \geq -1$, $t_N \leq 1$.

Теорема 2.1 [29]. Среди всевозможных к.ф. типа Маркова, имеющих вид (2.1), оптимальной на классе $W^1(1)$, является формула

$$\int\limits_{-1}^{1} \varphi(\tau)\tau^{-1}d\tau = \sum_{k=1}^{N-1} 2\ln\frac{k+1}{k}\left[\varphi\left(\frac{k(k+1)}{N(N+1)}\right) - \varphi\left(-\frac{k(k+1)}{N(N+1)}\right)\right] +$$

$$+\ln\frac{N+1}{N}[\varphi(1) - \varphi(-1)] + R_N(\varphi), \tag{2.2}$$

погрешность которой равна

$$R_N[W^1(1)] = \frac{2}{N+1} + \frac{(4+\ln N)}{N(N+1)}.$$

Теорема 2.2 [29]. Среди всевозможных к.ф. вида (2.1) с узлами, удовлетворяющими условию $-1 \leq t_{-N} < \cdots < t_{-1} \leq 0 \leq t_1 < \cdots <$ $< t_N \leq 1$, оптимальной на классе $W^1(1)$ является к.ф.

$$\int\limits_{-1}^{1} \varphi(\tau)\tau^{-1}d\tau = \sum_{k=1}^{N} 2\ln\frac{k+1}{k}\left[\varphi\left(\frac{k(k+1)}{(N+1)^2}\right) - \varphi\left(-\frac{k(k+1)}{(N+1)^2}\right)\right] +$$

$$+R_N(\varphi), \tag{2.3}$$

погрешность которой равна

$$R_N[W^1(1)] = \frac{2}{N+1} + \frac{(2+\ln N)}{(N+1)^2}.$$

2.1.2. Доказательства теорем

Сделаем несколько замечаний, относящихся к доказательству обеих теорем. Прежде всего предположим, что к.ф. (2.1), в случае ее применения к функциям класса $W^r(1)$, точна для полиномов степени $r-1$.

Разложим функцию $\varphi(t)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}t^k + \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{0}^{1} K_r(t-s)\varphi^{(r)}(s)ds$$

при $t \geq 0$,

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_0^{-1} \bar{K}_r(t-s)\varphi^{(r)}(s)ds$$

при $t \leq 0$,
где

$$K_r(u) = u^{r-1} \quad u \geq 0, 0 \quad u < 0,$$
$$\bar{K}_r(u) = u^{r-1} \quad u \leq 0, 0 \quad u > 0.$$

Так как к.ф. (2.1) точна для многочленов степени не выше $r-1$, то

$$\int\limits_{-1}^{1} \varphi(\tau)\tau^{-1}d\tau - \sum_{k=-N}^{N}{}' p_k \varphi(t_k) =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_{-1}^{1} \tau^{-1} [\int\limits_0^{\tau} (\tau - t)^{r-1} \varphi^{(r)}(t)dt]d\tau -$$

$$- \sum_{k=-N}^{N}{}' p_k \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_0^{t_k} (t_k - t)^{r-1} \varphi^{(r)}(t)dt =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_0^1 \varphi^{(r)}(t) [\int\limits_0^1 K_r(\tau - t)\tau^{-1}d\tau - \sum_{k=1}^{N} p_k K_r(t_k - t)]dt] +$$

$$+ \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_{-1}^{0} \varphi^{(r)}(t) [\int\limits_0^{-1} \bar{K}_r(\tau - t)\tau^{-1}d\tau - \sum_{k=-N}^{-1} p_k \bar{K}_r(t_k - t)]dt.$$

Таким образом, погрешность к.ф. (2.1) для функции $\varphi \in W^r(1)$ оценивается неравенством

$$|R_N(\varphi)| \leq \frac{2}{(r-1)!} |\int\limits_0^1 \varphi^{(r)}(t) [\int\limits_0^1 K_r(\tau - t)\tau^{-1}d\tau - \sum_{k=1}^{N} p_k K_r(t_k - t)]dt|.$$

Доказательство теоремы 2.1. Из условий теоремы следует, что $r = 1$, $t_{-N} = -1$, $t_N = 1$. В этом случае

$$|R_N(\varphi)| \le 2|\int\limits_0^1 \varphi'(t)[\int\limits_0^1 K_1(\tau - t)\tau^{-1}d\tau - \sum_{k=1}^N p_k K_1(t_k - t)]dt| \le$$

$$\le 2|\int\limits_0^1 |\int\limits_0^1 K_1(\tau - t)\tau^{-1}d\tau - \sum_{k=1}^N p_k K_1(t_k - t)|dt| =$$

$$= 2\int\limits_0^1 |-\ln t - \sum_{k=1}^N p_k K_1(t_k - t)|dt. \tag{2.4}$$

Найдем узлы t_k и веса p_k из условия минимальности интеграла, полагая $t_0 = 0$:

$$A_N = \int\limits_0^1 |-\ln t - \sum_{k=1}^N p_k K_1(t_k - t)|dt = \int\limits_0^{t_1} |-\ln t - M_1|dt + \int\limits_{t_1}^{t_2} |-\ln t - M_2|dt +$$

$$+ \cdots + \int\limits_{t_{N-1}}^1 |-\ln t - M_N|dt = \int\limits_0^{t'_1} (-\ln t - M_1)dt + \int\limits_{t'_1}^{t_1} (\ln t + M_1)dt +$$

$$+ \cdots + \int\limits_{t_{N-1}}^{t'_N} (-\ln t - M_N)dt + \int\limits_{t'_N}^1 (\ln t + M_N)dt.$$

Продифференцируем выражение A_N по переменным t_i, t'_i, M_i и приравняем полученные выражения нулю. В результате получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial A_N}{\partial t_i} = M_i + 2\ln t_i + M_{i+1} = 0, i = 1, 2, \cdots, N-1; \\ \frac{\partial A_N}{\partial t'_i} = -2M_i - 2\ln t'_i = 0, i = 1, 2, \cdots, N-1, N; \\ \frac{\partial A_N}{\partial M_i} = -2t'_i + t_i + t_{i-1} = 0, i = 1, 2, \cdots, N-1, N. \end{cases} \tag{2.5}$$

Преобразуем уравнения предыдущей системы к следующему виду:

$$\begin{cases} \ln t_i = -(M_i + M_{i+1})/2\ , \ i = 1, 2, \cdots, N-1; \\ M_i = -\ln t'_i\ , \ i = 1, 2, \cdots, N-1, N; \\ t'_i = (t_i + t_{i-1})/2\ , \ i = 1, 2, \cdots, N-1, N. \end{cases} \tag{2.6}$$

Отсюда $\ln t_i = (\ln t'_i + \ln t'_{i+1})/2$, $i = 1, 2, \cdots, N-1; t'_i = (t_i + t_{i-1})/2$, $i = 1, 2, \cdots, N-1, N$ и, следовательно, $t_i^2 = t'_i t'_{i+1}$, $t_i^2 = \frac{t_i+t_{i-1}}{2}\frac{t_{i+1}+t_i}{2}$, $4t_i^2 = (t_i + t_{i-1})(t_{i+1} + t_i)$, $i = 1, 2, \cdots, N-1$.

Выразим t_i $(i = 1, 2, \cdots, N)$ через t_1, учитывая, что $t_0 = 0$. Из предыдущей формулы следует справедливость рекуррентного выражения $t_{i+1} = (3t_i^2 - t_i t_{i-1})/(t_i + t_{i-1})$, $i = 1, 2, \cdots, N-1$, пользуясь которым без труда получаем $t_2 = 3t_1 = (1+2)t_1$, $t_3 = 6t_1$, $t_4 = 10t_1$.

Методом математической индукции можно доказать, что $t_n = n(n+1)t_1/2$. В самом деле, эта формула справедлива при $n = 2, 3, 4$. Пусть она справедлива при значении n. Покажем, что она будет справедлива и при $n+1$. Тогда $t_{n+1} = (3t_n^2 - t_n t_{n-1})/(t_n + t_{n-1}) = (n+2)(n+1)t_1/2$ и формула доказана. Теперь из требования $t_N = 1$ находим, что $t_1 = 2/N(N+1)$. Зная величины $t'_i = i^2 t_1/2$, без труда получаем $M_i = -\ln(i^2 t_1/2) = -\ln(i^2/N(N+1))$, $i = 1, 2, \cdots, N$. По константам M_i можно легко определить коэффициенты p_i оптимальной к.ф. В самом деле, $p_N = M_N$, $p_{N-1} = M_{N-1} - M_N$, $p_{N-2} = M_{N-2} - M_{N-1}$,..., $p_1 = M_1 - M_2$. Отсюда $p_N = -\ln(N/(N+1))$, $p_k = -2\ln(k/(k+1))$, $k = 1, 2, \cdots, N-1$. Запишем полученную к.ф. в явном виде

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\tau)\tau^{-1}d\tau = \sum_{k=1}^{N-1} 2\ln\frac{k+1}{k}[\varphi(\frac{k(k+1)}{N(N+1)}) - \varphi(-\frac{k(k+1)}{N(N+1)})] +$$

$$+ \ln\frac{N+1}{N}[\varphi(1) - \varphi(-1)] + R_N(\varphi).$$

Нетрудно оценить величину ее погрешности

$$|R_N(\varphi)| \le 2\sum_{k=1}^{N-1} |\int_{t_k}^{t_{k+1}} (\varphi(\tau) - \varphi(t'_{k+1}))\tau^{-1}d\tau| + |\int_{t_{-1}}^{t_1} \varphi(\tau)\tau^{-1}d\tau| \le$$

$$\le N(N+1)\sum_{k=1}^{N-1}[\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)^2}](\frac{t_{k+1} - t_k}{2})^2 + |\int_{t_{-1}}^{t_1} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(0)}{\tau}d\tau| \le$$

$$\le [N(N+1)]^{-1}\sum_{k=1}^{N-1}(1 + \frac{k+1}{k}) + \frac{4}{N(N+1)} \le \frac{2}{N+1} + \frac{4 + \ln N}{N(N+1)}.$$

Для доказательства оптимальности построенной к.ф. необходимо указать функцию $\varphi(t)$, для которой

$$|R_N(\varphi)| = 2\int\limits_0^1 |-\ln t - \sum_{k=1}^{N} p_k K_1(t_k - t)|dt.$$

В качестве такой функции можно взять функцию $\varphi^*(t)$, определяемую по формуле $\varphi^*(t) = \min_k |t - t_k|$, $k = 0, 1, \cdots, N-1, N$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.2. Это доказательство принципиально не отличается от доказательства теоремы 2.1. Как и в доказательстве предыдущей теоремы, погрешность к.ф. оценивается неравенством (2.4). Так как в данном случае t_N не обязательно равно 1, то A_N нужно представить в виде

$$A_N = \int\limits_0^{t_1} |-\ln t - M_1|dt + \int\limits_{t_1}^{t_2} |-\ln t - M_2|dt + \cdots + \int\limits_{t_{N-1}}^{t_N} |-\ln t - M_N|dt +$$

$$+ \int\limits_{t_N}^{1} ||\ln t|dt = \int\limits_0^{t'_1} (-\ln t - M_1)dt +$$

$$+ \int\limits_{t'_1}^{t_1} (\ln t + M_1)dt + \cdots + \int\limits_{t_{N-1}}^{t'_N} (-\ln t - M_N)dt +$$

$$+ \int\limits_{t'_N}^{t_N} (\ln t + M_N)dt + \int\limits_{t_N}^{1} -\ln t dt.$$

Минимизируя A_N по t_k, t'_k и M_k, приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial A_N}{\partial t_i} = M_i + 2\ln t_i + M_{i+1} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, N-1;$$

$$\frac{\partial A_N}{\partial t_N} = M_N + 2\ln t_N = 0,$$

$$\frac{\partial A_N}{\partial t'_i} = -2M_i - 2\ln t'_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, N-1, N;$$

$$\frac{\partial A_N}{\partial M_i} = -2t_i' + t_i + t_{i-1} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, N-1, N,$$

отличающейся от системы уравнений (2.5) только добавлением уравнения $\frac{\partial A_N}{\partial t_N} = M_N + 2\ln t_N = 0$. Решение этой системы ничем не отличается от решения системы уравнений (2.5), поэтому опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат: $t_k = k(k+$ $+1)/(N+1)^2$, $t_k' = k^2/(N+1)^2$, $M_k = -2\ln(k/(N+1))$, $k = 1, 2, \cdots, N$. Отсюда следует, что оптимальная к.ф. имеет вид (2.3). Погрешность этой к.ф., как легко видеть, равна $2/(N+1) + (2+\ln N)/(N+1)^2$.

2.2. Асимптотически оптимальные пассивные алгоритмы

2.2.1. Основные результаты

При вычислении интеграла

$$J\varphi = \int_{-1}^{1} \varphi(\tau)\tau^{-1} d\tau$$

на классе функций W^r $(r > 1)$ можно воспользоваться к.ф. вида

$$J\varphi = \sum_{k=-N}^{N}{}' \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl}\varphi^{(l)}(t_k) + R_N(\varphi), \tag{2.7}$$

где $-1 \le t_{-N} < \cdots < t_{-1} \le 0 \le t_1 < \cdots < t_N \le 1$, $\rho \le r-1$, $\sum'$ означает суммирование по $k \ne 0$.

Теорема 2.3 [29]. Пусть $\Psi = W_p^r(2^{1/p})$ $(1 \le p < \infty)$ и интеграл $J\varphi$ вычисляется по к.ф. вида (2.7) при $\rho = r-1$ $(r = 1, 2, \cdots)$. Тогда

$$\zeta_N[\Psi] \ge \left(\frac{rq+1}{rq+1-q}\right)^{r+1/q} \frac{R_{rq}(1)}{2^{r-1} r! \sqrt[q]{rq+1} N^r} + o(N^{-r}).$$

Теорема 2.4 [29]. Пусть $\Psi = W_p^r(2^{1/p})$ $(1 < p < \infty)$ и интеграл $\mathcal{J}\varphi$ вычисляется по к.ф. вида (2.7) при $\rho = r-2$ и $\rho = r-3$ $(r = 3, 5, \cdots)$. Тогда

$$\zeta_N[\Psi] \ge \left(\frac{rq+1}{rq+1-q}\right)^{r+1/q} \frac{||R_{rq}||_{Lq}}{2^{r-1/p} r! N^r} + o(N^{-r}).$$

Теорема 2.5 [29]. Среди всевозможных к.ф. вида (2.7) при $\rho = r - 1$ $(r = 1, 2, \cdots)$ асимптотически оптимальной на классе $\Psi = W_p^r(1, 1; -1, 1)$ $(1 \le p \le \infty)$ является формула

$$\int\limits_{-1}^{1} \varphi(\tau)\tau^{-1}d\tau = \sum_{k=1}^{N-1} \left[\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \tilde{\varphi}(\tau, \Delta_k)\tau^{-1}d\tau + \int\limits_{t_{-k-1}}^{t_{-k}} \tilde{\varphi}(\tau, \Delta_{-k})\tau^{-1}d\tau \right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!k} t_1^k (1 - (-1)^k) + R_N(\varphi), \tag{2.8}$$

где $t_{\pm k} = \pm(k/N)^{(rq+1)/q(r-1)+1}$, $k = 1, 2, \cdots, N$, $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, $\Delta_{-k} = [t_{-k-1}, t_{-k}]$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$; аппроксимирующие полиномы $\tilde{\varphi}(\tau, \Delta_{\pm k})$ введены в §1. Погрешность этой к.ф. оценивается неравенством

$$R_N[\Psi] \le \left(\frac{rq+1}{rq+1-q}\right)^{r+1/q} \frac{R_{rq}(1)}{2^{r-1}r!(rq+1)^{1/q}} N^{-r} + o(N^{-r}).$$

Введем обозначения $M = [\ln^{1/2r} N]$, $L = [N/M]$. Рассмотрим к.ф.

$$J\varphi = \sum_{k=1}^{r-1} \Pi_{n,r,p}[\varphi^{(k)}(0)] \frac{[1 - (-1)^k]}{k!k} t_1^* +$$

$$+ \sum_{k=1}^{L-1} \left[\int\limits_{t_k^*}^{t_{k+1}^*} \Pi_{n,r,p}\Big[T_{r-1}\big[\varphi; [t_k^*, t_{k+1}^*], t_k^*\big]\Big] \left[\frac{1}{\tau} - \frac{1}{t_{k+1}^*}\right] d\tau + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{t_{-k-1}^*}^{t_{-k}^*} \Pi_{n,r,p}\Big[T_{r-1}\big[\varphi; [t_{-k-1}^*, t_{-k}^*], t_{-k}^*\big]\Big] \left[\frac{1}{\tau} - \frac{1}{t_{-k-1}^*}\right] d\tau \right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{L-1} \Big[l_{M,r,p}\big[\varphi; [t_k^*, t_{k+1}^*]\big] t_{k+1}^{*-1} + l_{M,r,p}\big[\varphi; [t_{-k-1}^*, t_{-k}^*]\big] t_{-k-1}^{*-1} \Big] + R_N(\varphi), \tag{2.9}$$

где $t_{\pm k}^* = (\pm k/L)^v$, $k = 0, 1, \ldots, L$, $v = (rq+1)/(rq+1-q)$, $1/p + 1/q = 1$.

Теорема 2.6 [29]. Пусть $\Psi = W_p^r(1, 1; [-1, 1])$, $1 < p \le \infty$, $r = 1, 2, \ldots$. Среди всевозможных к.ф. вида (2.7) при $\rho = 0$ асимптотически оптимальной на классе Ψ является формула (2.9). Ее погрешность

равна

$$R_N[\Psi] = (1+o(1))\frac{2}{N^r}\left[\frac{rq+1}{rq+1-q)}\right]^{r+1/q}\inf_c \|B_r(\cdot)-c\|_{L_q[0,1]}.$$

2.2.2 Доказательства теорем

Доказательство теоремы 2.3. Введем следующие обозначения: $s_{\pm k} = \pm(kM/N)^{(rq+1)/(rq+1-q)}$, $k = 0, 1, \cdots, l$, $s_{-l-1} = -1$, $s_{l+1} = 1$, $M = [\ln N]$, $l = [N/M]$. Пусть $\varphi^*(t) \in \Psi-$ функция, обращающаяся в нуль вместе со своими производными до $r-1$ порядка включительно в узлах t_k к.ф. (2.7), в точках $s_{\pm k}$, $(k = 1, 2, \cdots, l+1)$, и, кроме того, равная нулю на сегменте $[s_{-1}, s_1]$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\int\limits_0^1 \varphi^*(\tau)\tau^{-1}d\tau \geq 0$, $\int\limits_{-1}^0 \varphi^*(\tau)\tau^{-1}d\tau \geq 0$.

Тогда

$$\int\limits_0^1 \varphi^*(\tau)\frac{1}{\tau}d\tau \geq \sum_{k=1}^{l}[\frac{1}{s_{k+1}}\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}\varphi^*(\tau)d\tau + (\frac{1}{s_k}-\frac{1}{s_{k+1}})\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}\varphi^{*-}(\tau)d\tau] =$$

$$= I_1 + I_2.$$

Воспользуемся утверждениями, составляющими лемму С.А. Смоляка и ее следствие, согласно которым

$$\sup_{\varphi\in W_p^r(1)\ ;\ \varphi^{(l)}(t_k)=0\ ;\ k=1,\cdots,N\ ;\ l=0,1,\cdots,r-1}\int\limits_0^1 \varphi(\tau)d\tau =$$

$$= \inf_{\lambda_{kl}}\sup_{\varphi\in W_p^r(1)}|\int\limits_0^1 \varphi(\tau)d\tau - \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=0}^{r-1}\lambda_{kl}\varphi^{(l)}(t_k)|.$$

Воспользовавшись этим равенством и теоремами 3.18 и 3.19 из первой главы, имеем

$$\sup_{\varphi\in W_p^r(M_k,[s_k,s_{k+1}])\ ;\ \varphi^{(l)}(t_j)=0\ ;\ k=1,\cdots,N_k\ ;\ l=0,1,\cdots,r-1}|\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}\varphi(\tau)d\tau| =$$

$$= \inf_{p_{jl}} \sup_{\varphi \in W_p^r(M_k;[s_k,s_{k+1}])} |\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi(\tau)d\tau - \sum_{j=1}^{N_k}\sum_{l=0}^{r-1} p_{jl}\varphi^{(l)}(t_j)| \geq$$

$$\geq |\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi_*(\tau)d\tau - \sum_{j=1}^{N_k}\sum_{l=0}^{r-1} p_{jl}^*\varphi_*^{(l)}(t_j)| =$$

$$= (s_{k+1}-s_k)^{r+1-1/p} M_k \inf_{p_{jl}} \sup_{\varphi \in W_p^r(1;[0,1])} |\int\limits_0^1 \varphi(\tau)d\tau - \sum_{j=1}^{N_k}\sum_{l=0}^{r-1} p_{jl}\varphi^{(l)}(t_j)| \geq$$

$$\geq (s_{k+1}-s_k)^{r+1-1/p} M_k R_{rq}(1)/2^r r! \sqrt[q]{rq+1}(N_k+1+[R_{rq}(1)]^{1/r})^r.$$

Здесь p_{jl}^*– набор констант, существование которых следует из леммы С. А. Смоляка, а $\varphi_*(t)$– функция, о которой идет речь в теореме 3.18.

Поэтому

$$I_1 = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{s_{k+1}} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi^*(\tau)d\tau \geq$$

$$\geq \frac{R_{rq}(1)}{2^r r! \sqrt[q]{rq+1}} \sum_{k=1}^{l} \frac{(s_{k+1}-s_k)^{r+1-1/p}}{s_{k+1}} \frac{M_k}{(N_k+1+[R_{rq}(1)]^{1/r})^r}.$$

Величинами M_k мы можем распоряжаться по своему усмотрению, выполнив только единственное условие $\sum\limits_{k=-l}^{l} M_k^p = 2$. Положив все значения M_k равными $(1/l)^{1/p}$, имеем

$$I_1 \geq \frac{R_{rq}(1)}{2^r r!(rq+1)^{1/q} l^{1/p}} \sum_{k=1}^{l} \frac{(s_{k+1}-s_k)^{r+1-1/p}}{s_{k+1}} \frac{1}{(N_k+1+[R_{rq}(1)]^{1/r})^r} \geq$$

$$\geq \frac{R_{rq}(1)}{2^r r!(rq+1)^{1/q} N^r} (\frac{rq+1}{rq+1-q})^{r+1/q} + o(N^{-r}). \qquad (2.10)$$

Так как сумма I_2 неположительна, то для усиления неравенства (2.9) нужно оценить сверху $|I_2|$:

$$|I_2| \leq \sum_{k=1}^{l} |\frac{1}{s_k} - \frac{1}{s_{k+1}}| |\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi^{*-}(\tau)d\tau| \leq \sum_{k=1}^{l} \frac{s_{k+1}-s_k}{s_{k+1}s_k} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} |\varphi^*(\tau)|d\tau \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{l} \frac{s_{k+1}-s_k}{s_{k+1}s_k} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{1}{(r-1)!} \left| \int\limits_{s_k}^{\tau} (\tau-t)^{r-1} \varphi^{*(r)}(t)dt \right| d\tau =$$

$$= o((M/N)^{r+1/q} \ln l) = o(N^{-r}). \qquad (2.11)$$

Из оценок (2.10) – (2.11) следует справедливость теоремы.

Доказательство теоремы 2.4 аналогично доказательству теоремы 2.3. Укажем лишь изменения, которые необходимо при этом сделать. Предположим, что $\rho = r-2$ или $\rho = r-3$ $(r = 3, 5, \cdots)$. Как и при доказательстве теоремы 2.3, воспользуемся неравенством

$$\int\limits_0^1 \varphi^*(\tau)\tau^{-1}d\tau \geq \sum_{k=1}^{l} [\frac{1}{s_{k+1}} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi^*(\tau)d\tau + (\frac{1}{s_k} - \frac{1}{s_{k+1}}) \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi^{*-}(\tau)d\tau] = I_1' + I_2',$$

но теперь под $\varphi^*(\tau)$ понимается функция, обращающаяся в нуль вместе с производными до $r-2$ порядка в узлах t_k к.ф. (2.7) и обращающаяся в нуль вместе с производными до $r-1$ порядка в точках s_k $(k = 0, 1, \cdots, l+1)$. Повторяя доказательство теоремы 2.3 и воспользовавшись оценкой погрешности , полученной Н.Е. Лушпаем [102] для к.ф. вида (2.7) на классе $W_{0,1}^r(1)$, состоящем из функций, принадлежащих классу $W^r(1)$ и удовлетворяющих дополнительному условию $f(0) = f^{(1)}(0) = \cdots = f^{(r-1)}(0) = f(1) = f^{(1)}(1) = \cdots = f^{(r-1)}(1) = 0$, имеем $I_1' \geq ((qr+1)/(qr+1-q))^{r+1/q} ||R_{rq}||_{L_q[-1,1]}/r!2^{r+1/q}N^r + o(N^{-r})$. Оценка суммы I_2' проводится так же, как и при доказательстве теоремы 2.3. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.5. Погрешность к.ф. (2.8) оценивается неравенством

$$|R_N(\varphi)| \leq |\int\limits_{t_{-1}}^{t_1} \varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau} - \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!k} t_1^k (1-(-1)^k)| +$$

$$+2\sum_{k=1}^{N-1} |\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} (\varphi(\tau) - \tilde{\varphi}(\tau, \Delta_k)\frac{d\tau}{\tau}| = I_3 + I_4.$$

Для оценки I_3 заметим, что

$$I_3 = |\int\limits_{t_{-1}}^{t_1} \tau^{-1}[\varphi(\tau) - \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!k}\tau^k]d\tau| =$$

$$= |\int\limits_{t_{-1}}^{t_1} \frac{1}{\tau(r-1)!}[\int\limits_0^{\tau}(\tau-t)^{r-1}\varphi^{(r)}(t)dt]d\tau| \le$$

$$\le \frac{2}{(r-1)!}\int\limits_0^{t_1}\tau^{-1}[\int\limits_0^{\tau}|\varphi^{(r)}(t)|^p dt]^{1/p}[\int\limits_0^{\tau}(\tau-t)^{(r-1)q}dt]^{1/q}d\tau \le AN^{-r-1/q} =$$

$$= o(N^{-r}).$$

Сумма I_4 оценивается сложнее

$$I_4 \le \frac{2}{r!}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{t_k}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}|\varphi^{(r)}(t)||(t_{k+1}-t)^r - \sum_{j=0}^{r-1}\frac{B_{kj}(t_{k+1}-t_k)r!}{(r-1-j)!(t_{k+1}-t)^{r-1-j}}|dt \le$$

$$\le \frac{2}{r!}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{t_k}\left[\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}|\varphi^{(r)}(t)|^p dt\right]^{1/p} \times$$

$$\times \left[\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left|(t_{k+1}-t)^r - \sum_{j=0}^{r-1}\frac{B_{kj}(t_{k+1}-t_k)r!}{(r-1-j)!}(t_{k+1}-t)^{r-1-j}\right|^q dt\right]^{1/q} =$$

$$= \frac{2^{1+1/q}R_{rq}(1)}{(rq+1)^{1/q}r!}\sum_{k=1}^{N-1}\left[\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}|\varphi^{(r)}(t)|^p dt\right]^{1/p}\left(\frac{t_{k+1}-t_k}{2}\right)^{r+1/q} \le$$

$$\le \frac{R_{rq}(1)}{(rq+1)^{1/q}2^{r-1}r!}\left(\frac{rq+1}{rq+1-q}\right)^{r+1/q}\frac{(1+o(1))}{N^r}.$$

Из оценок I_3 и I_4 следует справедливость теоремы.

Доказательство теоремы 2.6. Вначале оценим снизу величину $\zeta_N[\Psi]$. Введем точки $\zeta_{\pm k} = \pm(k/L)^v,\ k = 0, 1, \ldots, L,\ v = (rq+$ $+1)/(rq+1-q)$. Обозначим через $\{w_k\}$ объединение узлов $\{t_i\}$ к.ф. (2.7) и точек $\{\zeta_j\}$. Обозначим через $\varphi^*(t)$ функцию, принадлежащую множеству $W_p^r(1,1;[-1,1])$, равную нулю в узлах t_k к.ф. (2.7), обращающуюся в нуль вместе с производными до $r-1$ порядка в точках ζ_j и равную нулю на сегменте $[\zeta_{-1}, \zeta_1]$. Покажем, что такая функция существует. В §3 главы 1 приведена наилучшая к.ф. типа Эйлора—Маклорена, которая

на классе функций $W_p^r(1)$ имеет погрешность $N^{-r}\inf\limits_c \|_r^*(t)-c\|_{L_q[0,1]}$. Используя эту формулу, лемму С.А. Смоляка и теоремы 3.18 и 3.24 главы 1 следует, что на сегменте $[\zeta_k,\zeta_{k+1}]$ существует функция $\varphi_k^*(t)$, равная нулю в узлах $\{t_l\}$, расположенных в $[\zeta_k,\zeta_{k+1}]$, обращающаяся в нуль вместе с производными порядка $r-1$ на концах сегмента и такая, что

$$\int\limits_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \varphi_k^* dt \geq [\zeta_{k+1}-\zeta_k]^{r+1/q}\frac{M_k}{(N_k+1)^r}\inf_c \|B_r^*(t)-c\|_{L_q[0,1]}.$$

Здесь $M_k = \left[\int\limits_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} |\varphi^*(t)|^p dt\right]^{1/p}$, N_k— число узлов к.ф. (2.7), попавших на сегмент $[\zeta_k,\zeta_{k+1}]$.

Введем функцию $\varphi^*(t)=\varphi_k^*(t)\mathrm{sgn}t$ при $t\in[\zeta_k,\zeta_{k+1}]$, $k\neq -1,0$ и $\varphi^*(t)=0$ при $t\in[\zeta_{-1},\zeta_1]$.

Оценим интеграл $\left|\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi^*(t)}{t}dt\right|$. При этом ограничимся оценкой интеграла $\int\limits_0^1\frac{\varphi^*(t)}{t}dt$.

Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_0^1 \frac{\varphi^*(t)}{t}dt \geq \sum_{k=1}^{L}\int\limits_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}}\frac{\varphi^*(t)}{t}dt \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{L}\left[\frac{1}{\zeta_{k+1}}\int\limits_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}}\varphi^*(t)dt + \frac{\zeta_{k+1}-\zeta_k}{\zeta_k\zeta_{k+1}}\int\limits_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}}\varphi^-(t)dt\right] = I_1+I_2,$$

где $\varphi^+(t)=[\varphi(t)+|\varphi(t)|]/2$, $\varphi^-(t)=[\varphi(t)-|\varphi(t)|]/2$.

Оценим

$$I_1=\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\zeta_{k+1}}\int\limits_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}}\varphi^*(t)dt \geq \sum_{k=1}^{L}\frac{(\zeta_{k+1}-\zeta_k)^{r+1/q}}{\zeta_{k+1}(N_k+1)^r}M_k\inf_c\|B_r^*(t)-c\|_{L_q[0,1]} \geq$$

$$\geq \left[\frac{rq+1}{rq+1-q}\right]^{r+1/q}\inf_c\|B_r^*(t)-c\|_{L_q[0,1]}N^{-r}. \qquad (2.12)$$

В этих выкладках величины M_k были положены равными $(1/L)^{1/p}$.

Оценим теперь I_2. Из построения функции $\varphi^*(t)$ следует, что эта функция обращается в нуль вместе с производными до $(r-1)$-го порядка в точках ζ_k. Обозначив $|\zeta_{k+1}-\zeta_k|$ через h_k, имеем

$$\sup_{t\in[\zeta_k,\zeta_{k+1}]}|\varphi^*(t)|\le\frac{M_k h_k^{r-1/p}}{(r-1)!}.$$

Следовательно,

$$|I_2|=\left|\sum_{k=1}^{L}\frac{\zeta_{k+1}-\zeta_k}{\zeta_k\zeta_{k+1}}\int\limits_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}}\varphi^-(t)\right|\le o(N^{-r}). \tag{2.13}$$

Из оценок (2.12) — (2.13) имеем

$$\zeta_N\Big[W^rL_p(1)\Big]\ge\frac{2+o(1)}{N^r}\left[\frac{rq+1}{rq+1-q}\right]^{r+1/q}\inf_c\|B_r^*(t)-c\|_{L_q[0,1]}.$$

Оценим погрешность к.ф. (2.9). Нетрудно видеть, что

$$|R_N(\varphi)|\le\left|\int\limits_{t_{-1}^*}^{t_1^*}\frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau-\sum_{k=1}^{r-1}\varphi^k(0)\frac{(1-(-1)^k)}{k!k}t_1^{*k}\right|+$$

$$+\left|\sum_{k=1}^{r-1}\Big[\varphi^k(0)-\Pi_{n,r,p}\big[\varphi^k(0)\big]\Big]\frac{(1-(-1)^k)}{k!k}t_1^{*k}\right|+$$

$$+\sum_{k=1}^{L}\left|\int\limits_{t_k^*}^{t_{k+1}^*}\left[\varphi(\tau)-\sum_{l=0}^{r-1}\varphi^{(l)}(t_k^*)\frac{(\tau-t_k^*)^l}{l!}\right]\left[\frac{1}{\tau}-\frac{1}{t_k^*}\right]\right|d\tau+$$

$$+\sum_{k=1}^{L}\left|\sum_{l=0}^{r-1}\Big[\varphi^l(t_k^*)-\Pi_{n,r,p}\big[\varphi^{(l)}(t_k^*)\big]\Big]\ln\frac{t_{k+1}^*}{t_k^*}\right|+$$

$$+\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{t_k^*}\left|\int\limits_{t_k^*}^{t_{k+1}^*}\varphi(\tau)d\tau-l_{M,r,p}\big[\varphi;[t_k^*,t_{k+1}^*]\big]\right|+$$

$$+\sum_{k=1}^{L}\int\limits_{t^*_{-k-1}}^{t^*_{-k}}\left[\varphi(\tau)-\sum_{l=0}^{r-1}\varphi^{(l)}(t^*_{-k})\frac{(\tau-t^*_{-k})}{l!}\right]\left[\frac{1}{\tau}-\frac{1}{t^*_{-k}}\right]d\tau+$$

$$+\sum_{k=1}^{L}\left|\sum_{l=0}^{r-1}\Big[\varphi^{l}(t^*_{-k})-\Pi_{n,r,p}\big[\varphi^{(l)}(t^*_{-k})\big]\Big]\ln\frac{t^*_{-k}}{t^*_{-k-1}}\right|+$$

$$+\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{t^*_{-k}}\left|\int\limits_{t^*_{-k-1}}^{t^*_{-k}}\varphi(\tau)d\tau-l_{M,r,p}\big[\varphi;[t^*_{-k-1},t^*_{-k}]\big]\right|\leq$$

$$\leq\frac{2+o(1)}{N^r}\inf_c\|B^*_r(t)-c\|_{L_q[0,1]}\left[\frac{rq+1}{rq+1-q}\right]^{r+1/q}.$$

Теорема доказана.

2.3. Оптимальные по порядку пассивные алгоритмы

Этот раздел начнем с анализа квадратурных формул вида (2.1) на классах функций W^r_p.

2.3.1. Формулировки теорем

Теорема 2.7 [29]. Пусть $\Psi=W^r_1(1,1;[-1,1])$ $(r=2,4,\cdots)$ и интеграл $\mathcal{J}\varphi$ вычисляется по к.ф. вида (2.1). Тогда
$\zeta_N[\Psi]\geq K_{r-1}r^r/\pi^{r-1}2^r(r-1)^rN^r+o(N^{-r})$.

Теорема 2.8 [29]. Пусть $\Psi=W^r_p(1,1;[-1,1])$, $(1<p<\infty)$, $(r=$ $=1,2,4,\cdots)$ и интеграл $J\varphi$ вычисляется по к.ф. вида (2.1). Тогда
$\zeta_N[\Psi]\geq\frac{2}{N^r}(\frac{rq+1}{rq+1-q})^{r+1/q}\inf_c||B^*_r(t)-c||_q$.

Разделим сегмент $[-1,1]$ на сегменты $\Delta_k=[t_k,t_{k+1}]$, $k=-N,\cdots,-1,$ $0,1,\cdots,N-1$, $t_0=0$, $t_k=(k/N)^{(rq+1)/(rq+1-q)}$, $t_{-k}=-(k/N)^{(rq+1)/(rq+1-q)}$, $k=1,2,\cdots,N$. В каждом сегменте Δ_k (при $k\neq-1,0$) аппроксимируем функцию $\varphi(\tau)$ отрезком ряда Тейлора

$$T_r(\varphi;[t_k,t_{k+1}],t'_k)=\varphi(t'_k)+\frac{\varphi'(t'_k)}{1!}+\cdots+\frac{\varphi^{(r-1)}(t'_k)}{(r-1)!}(\tau-t'_k)^{r-1},$$

где $t'_k=(t_k+t_{k+1})/2$. Интеграл $J\varphi$ будем вычислять по к.ф.

$$J\varphi=\int\limits_{t_{-1}}^{t_1}\tau^{-1}T_r(\varphi;[t_{-1},t_1],0)d\tau+\sum_{k=1}^{N-1}[\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\tau^{-1}T_r(\varphi;[t_k,t_{k+1}],t'_k)d\tau+$$

$$+\int\limits_{t_{-k-1}}^{t_{-k}} \tau^{-1} T_r(\varphi; [t_k, t_{k+1}], t'_{-k-1}) d\tau] + R_N(\varphi). \qquad (2.14)$$

Теорема 2.9 [29]. Среди всевозможных квадратурных формул вида (2.7) при $\rho = r - 1$ формула (2.14) является оптимальной по порядку на классе функций $\Psi = W_p^r(1, 1; [-1, 1])$, $(1 \le p < \infty)$ и ее погрешность равна

$$R_N[\Psi] = \left(\frac{rq+1}{rq+1-q}\right)^{r+1/q} \frac{1}{2^{r-2+1/q}(r-1)!\sqrt[q]{rq+1-q}(r+1/q)N^r} +$$

$$+o(N^{-r}).$$

2.3.2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 2.7. Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.4. Отличие состоит в том, что в качестве узлов s_k следует взять $s_0 = 0$, $s_{\pm k} = \pm(kM/N)^{r/(r-1)}$, $(k = 1, \cdots, l)$, $s_{\pm(l+1)} = \pm 1$. Поэтому можно сразу воспользоваться неравенством

$$\int\limits_0^1 \varphi^*(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \ge \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{s_{k+1}} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi^*(\tau) d\tau +$$

$$+\sum_{k=1}^{l} \left(\frac{1}{s_k} - \frac{1}{s_{k+1}}\right) \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi^{-*}(\tau) d\tau = I_1 + I_2.$$

Из теоремы 3.17 главы 1 и леммы С.А. Смоляка следует, что справедливо неравенство

$$\sup \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi(\tau) d\tau \ge \frac{K_{r-1}(s_{k+1} - s_k)^r M_k}{2^{r+1}\pi^{r-1} N_k^r}.$$

Здесь через M_k обозначена величина $\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} |\varphi^{(r)}(\tau)| d\tau$, N_k– число точек, в которых функция $\varphi(t)$ обращается в нуль на сегменте $[s_k, s_{k+1}]$,

включая сюда концы сегмента, supremum берется по множеству функций с суммируемой r-й производной, обращающихся в нуль в узлах $t_k \in [s_k, s_{k+1}]$ и в точках s_k, s_{k+1}. Поэтому справедливо неравенство

$$I_1 = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{s_{k+1}} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi^*(\tau) d\tau \geq$$

$$\geq \frac{K_{r-1}}{2^{r+1}\pi^{r-1}} \left(\frac{r}{r-1}\right)^r \left(\frac{M}{N}\right)^r \sum_{k=1}^{l} \left(\frac{k-\theta_k}{k}\right)^{r/(r-1)} \frac{M_k}{(N_k+2)^r} - o(N^{-r}).$$

Величины M_k еще не были определены. Возьмем их равными $M_k = 1/l$, $k = 1, 2, \cdots, l$. Тогда

$$I_1 \geq \frac{K_{r-1}}{2^{r+1}\pi^{r-1}} \left(\frac{r}{r-1}\right)^r \left(\frac{M}{N}\right)^r \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{l} \left(\frac{k-\theta_k}{k}\right)^{r/(r-1)} \frac{1}{(N_k+2)^r} - o(N^{-r}) \geq$$

$$\geq \frac{K_{r-1}}{2^{r+1}\pi^{r-1}} \left(\frac{r}{r-1}\right)^r \frac{1}{N^r} + o(N^{-r}).$$

Приступая к оценке I_2, заметим, что так как в точке s_k функция $\varphi^*(\tau)$ по построению обращается в нуль вместе со своими производными до $r-1$ порядка включительно, то на сегменте $[s_k, s_{k+1}]$
$\varphi^*(\tau) = \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_{s_k}^{\tau} (\tau - t)^{r-1} \varphi^{*(r)}(t) dt$ и, следовательно,
$|\varphi^*(\tau)| \leq \frac{(\tau - s_k)^{r-1}}{(r-1)!} \int\limits_{s_k}^{\tau} |\varphi^{*(r)}(t)| dt.$

Поэтому

$$|I_2| = |\sum_{k=1}^{l} \left(\frac{1}{s_k} - \frac{1}{s_{k+1}}\right) \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi^{-*}(\tau) d\tau| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{l} \frac{(s_{k+1} - s_k)^{r+1}}{r! l s_k s_{k+1}} = o(N^{-r-1} \ln^{r+2} N) = o(N^{-r}).$$

Из оценок I_1 и I_2 следует справедливость теоремы.

Доказательство теоремы 2.8. Будем придерживаться обозначений, введенных при доказательстве теоремы 2.7 с той лишь разницей, что под s_k понимается число $(kM/N)^{(rq+1)/(rq+1-q)}$. Как и выше, ограничимся рассмотрением интеграла $\int\limits_0^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau$. Разобъем сегмент $[0, 1]$ на более

мелкие сегменты $\Delta_k = [s_k, s_{k+1}]$, $k = 0, 1, \cdots, l$, причем $s_{l+1} = 1$. Определим функцию $\varphi^*(\tau)$ так, что в каждом сегменте Δ_k $(k = 1, 2, \cdots, l)$ $\varphi^*(\tau) \in W_p^r(M_k, \Delta_k)$ и обращается в нуль в узлах t_k к.ф. (2.1), расположенных на сегменте Δ_k. На концах сегмента Δ_k функция $\varphi^*(\tau)$ обращается в нуль вместе со своими производными до $2[r/2] - 1$ порядка включительно. Величины M_k будут определены ниже. На сегменте $[s_{-1}, s_1]$ $\varphi^*(\tau) \equiv 0$.

Теперь, полагая, что $\int\limits_0^1 \varphi^*(\tau)\tau^{-1}d\tau > 0$, оценим снизу интеграл

$$\int\limits_0^1 \varphi^*(\tau)\frac{d\tau}{\tau} \geq \sum_{k=1}^{l} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi^*(\tau)\frac{d\tau}{\tau} \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{l}[\frac{1}{s_{k+1}} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi^*(\tau)d\tau + \frac{s_{k+1} - s_k}{s_{k+1}s_k} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi^-(\tau)d\tau] = I_3 + I_4.$$

Оценим вначале сумму I_3. Известно (см. теорему 3.22 в главе 1), что наилучшая к.ф. вида $\int\limits_0^1 \varphi(\sigma)d\sigma - \sum\limits_{k=1}^{N} p_k\varphi(t_k)$ на классе функций $W_p^r(1)$ имеет погрешность, равную $N^{-r} \inf\limits_c ||B_r^*(t) - c||_q$. Из этого утверждения и следствия леммы С.А. Смоляка следует, что

$$\sup_{\varphi \in W_p^r(M_k, \Delta_k)\ ,\ \varphi(t_k)=0\ ,\ t_k \in \Delta_k} |\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi(\tau)d\tau| \geq$$

$$\geq (s_{k+1} - s_k)^{r+1/q} \frac{M_k}{(N_k + 1)^r} \inf_c ||B_r^*(t) - c||_q.$$

Подставляя это значение в выражение для I_3, имеем

$$I_3 = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{s_{k+1}} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi^*(\tau)d\tau \geq \sum_{k=1}^{l} \frac{(s_{k+1} - s_k)^{r+1/q} M_k}{s_{k+1}(N_k + 1)^r} \inf_c ||B_r(t) - c||_q =$$

$$= \left(\frac{M}{N}\right)^{r+1/q} \left(\frac{rq + 1}{rq + 1 - q}\right)^{r+1/q} \sum_{k=1}^{l} \left(\frac{k + \theta_k}{k + 1}\right)^{(rq+1)/(rq+1-q)} \frac{M_k}{(N_k + 1)^r} \times$$

$$\times \inf_c ||B_r^*(t) - c||_q = A \sum_{k=1}^{l} \left(\frac{k+\theta_k}{k+1} \right)^{(rq+1)/(rq+1-q)} \frac{1}{(N_k+1)^r} \geq$$

$$\geq A \sum_{k=M}^{l} \left(\frac{k+\theta_k}{k+1} \right)^{(rq+1)/(rq+1-q)} \frac{1}{(N_k+1)^r} \geq$$

$$\geq A \sum_{k=M}^{l} \frac{1}{(N_k+1)^r} + o(N^{-r}) =$$

$$= A \frac{l}{M^r} + o(N^{-r}) = \left(\frac{rq+1}{rq+1-q} \right)^{r+1/q} \inf_c ||B_r^*(t) - c||_q N^{-r}.$$

В этих выкладках через A обозначена величина

$$A = \left(\frac{M}{N} \right)^{r+1/q} l^{-1/p} \left(\frac{rq+1}{rq+1-q} \right)^{r+1/q} \inf_c ||B_r(t) - c||_q,$$

а величины $M_k = [\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} |\varphi^*(r)|^p d\tau]^{1/p}$ были положены равными $(1/l)^{1/p}$. Обозначим $(s_{k+1} - s_k)$ через H_k $(k = 1, 2, \cdots, l)$. Из построения функции $\varphi^*(\tau)$ следует, что на сегменте Δ_k $|\varphi^*(\tau)| \leq M_k H_k^{r-1/p}$. Поэтому обозначая через B несущественные для дальнейщего константы, имеем

$$|I_4| = |\sum_{k=1}^{l} \frac{s_{k+1} - s_k}{s_{k+1} s_k} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi^{*-}(\tau) d\tau| \leq B \sum_{k=1}^{l} \frac{(s_{k+1} - s_k)^{r+1+1/q}}{s_{k+1} s_k} =$$

$$= B \left(\frac{M}{N} \right)^{r+1/q} l^{-1/p} \sum_{k=1}^{l} \frac{(k+\theta_k)^{(rq+q+1)/(rq-q+1)}}{(k(k+1))^{(rq+1)/(rq-q+1)}} \leq$$

$$\leq B \left(\frac{M}{N} \right)^{r+1/q} l^{-1/p} \sum_{k=1}^{l} \frac{k^{q/(rq-q+1)}}{(k-1)^{(rq+1)/(rq-q+1)}} = o(N^{-r}).$$

Из оценок сумм I_3 и I_4 следует, что

$$\int\limits_0^1 \frac{\varphi^*(\tau)}{\tau} d\tau \geq \left(\frac{rq+1}{rq+1-q} \right)^{r+1/q} \inf_c ||B_r^*(t) - c||_q N^{-r} + o(N^{-r})$$

и, окончательно

$$\sup_{\varphi\in W_p^r(1,1;[-1,1])}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau=\frac{2}{N^r}\left(\frac{rq+1}{rq+1-q}\right)^{r+1/q}\inf_c||B_r^*(t)-c||_q+o(N^{-r}),$$

где supremum берется по всем функциям $\varphi\in W_p^r(1,1;[-1,1])$ обращающимся в нуль в узлах к.ф. (2.1).

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.9. Погрешность $R_N(\varphi)$ определяется неравенством

$$|R_N(\varphi)|\le|\int\limits_{t_{-1}}^{t_1}\frac{(\varphi(\tau)-T_r(\varphi;[t_{-1},t_1],t_0))}{\tau}d\tau|+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{(\varphi(\tau)-T_r(\varphi;[t_k,t_{k+1}],t'_k))}{\tau}d\tau|+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}|\int\limits_{t_{-k-1}}^{t_{-k}}\frac{(\varphi(\tau)-T_r(\varphi;[t_{-k-1},t_{-k}],t'_{-k-1}))}{\tau}d\tau|=I_5+I_6+I_7.$$

Интеграл I_5 оценивался выше в разд. 1. Из формулы (1.10), применяя неравенство Коши-Буняковского, легко заключить, что

$$I_5\le\frac{2}{(r-1)!\sqrt{rq-q+1}(r-1/p)N^{r+1/p}}.$$

Оценка суммы I_6 следует из цепочки неравенств

$$I_6\le\frac{1}{(r-1)!}\sum_{k=1}^{N-1}|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{1}{\tau}[\int\limits_{c_k}^{\tau}(\tau-t)^{r-1}\varphi^{(r)}(t)dt]d\tau|\le$$

$$\le\frac{2}{(r-1)!}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{t_k}\int\limits_{c_k}^{t_{k+1}}\frac{(\tau-c_k)^{r-1+1/q}}{\sqrt[q]{rq+1-q}}d\tau||\varphi^{(r)}||_{L_p(t_k,t_{k+1})}=$$

$$=\frac{2}{(r-1)!\sqrt[q]{rq+1-q}(r+1/q)}\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{t_{k+1}-t_k}{2}\right)^{r+1/q}\|\varphi^{(r)}\|_{L_p(\Delta_k)}\frac{1}{t_k}=$$

$$= \frac{1}{2^{r-1+1/q}(r-1)!\sqrt[q]{rq+1-q}(r+1/q)} \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{t_{k+1}-t_k}{2}\right)^{r+1/q} \frac{||\varphi^{(r)}||_{L_p(\Delta_k)}}{t_k} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{r-1+1/q}(r-1)!\sqrt[q]{rq+1-q}(r+1/q)} \left[\sum_{k=1}^{N-1} \frac{(t_{k+1}-t_k)^{rq+1}}{t_k^q}\right]^{1/q} =$$

$$= \left(\frac{rq+1}{rq-q+1}\right)^{r+1/q} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{q(rq+1)/(q(r-1)+1)}\right)^{1/q} \times$$

$$\times \frac{1}{2^{r-1+1/q}(r-1)!\sqrt[q]{rq+1-q}(r+1/q)N^{r+1/q}} =$$

$$= \left(\frac{rq+1}{rq-q+1}\right)^{r+1/q} \frac{1}{2^{r-1+1/q}(r-1)!\sqrt[q]{rq+1-q}(r+1/q)N^r} + o\left(\frac{1}{N^{-r}}\right).$$

Здесь $c_k = (t_{k+1}+t_k)/2$. Сумма I_7 оценивается так же, как и сумма I_6.

Теорема доказана.

3. Асимптотически оптимальные квадратурные формулы с пограничным слоем на классе $\mathbf{W^rL_p}$

В этом параграфе исследуются методы вычисления сингулярных интегралов вида

$$J\varphi = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau$$

на классах функций W^rL_p. В качестве методов вычисления используется к.ф.

$$J\varphi = \sum_{k=-N}^{N}{}' p_k\varphi(t_k) + R_N(\varphi), \tag{3.1}$$

где $-1 \leq t_{-N} < \cdots < t_{-1} \leq 0 \leq t_1 < \cdots < t_N \leq 1$, $\sum'$ означает суммирование по $k \neq 0$.

Введем обозначения $M = [\ln^{1/2r} N]$, $L = [N/M]$. Рассмотрим к.ф.

$$J\varphi = \sum_{k=1}^{r-1} \Pi_{n,r,p}[\varphi^{(k)}(0)] \frac{[1-(-1)^k]}{k!k} t_1^* +$$

$$+\sum_{k=1}^{L-1}\left[\int\limits_{t_k^*}^{t_{k+1}^*}\Pi_{n,r,p}\Big[T_{r-1}\big[\varphi;[t_k^*,t_{k+1}^*],t_k^*\big]\Big]\left[\frac{1}{\tau}-\frac{1}{t_{k+1}^*}\right]d\tau+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{t_{-k-1}^*}^{t_{-k}^*}\Pi_{n,r,p}\Big[T_{r-1}\big[\varphi;[t_{-k-1}^*,t_{-k}^*],t_{-k}^*\big]\Big]\left[\frac{1}{\tau}-\frac{1}{t_{-k-1}^*}\right]d\tau\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{L-1}\Big[l_{M,r,p}\big[\varphi;[t_k^*,t_{k+1}^*]\big]t_{k+1}^*+l_{M,r,p}\big[\varphi;[t_{-k-1}^*,t_{-k}^*]\big]t_{-k-1}^*\Big]+R_N(\varphi),\quad(3.2)$$

где $t_\pm^*=\pm(k/L)^v,\ k=0,1,\dots,L,\ v=(rq+1)/(rq+1-q)$, $1/p+1/q=1$.

Теорема 3.1 [29]. Пусть $\Psi=W_p^r(1,1;[-1,1]),\ 1<p\le\infty,\ r=$ $=1,2,\dots$. Среди всевозможных к.ф. вида (3.1) асимптотически оптимальной на классе Ψ является формула (3.2). Ее погрешность равна

$$R_N[\Psi]=[1+o(1)]\frac{2}{N^r}\left[\frac{rq+1}{rq+1-q)}\right]^{r+1/q}\inf_c\|B_r^*(\cdot)-c\|_{L_q[0,1]}.$$

Доказательство. Оценим снизу величину $\zeta_N[\Psi]$. Введем точки $\zeta_{\pm k}=\pm(k/L)^v,\ k=0,1,\dots,L,\ v=(rq+1)/(rq+1-q)$. Обозначим через $\{w_k\}$ объединение узлов $\{t_i\}$ к.ф. (3.1) и точек $\{\zeta_j\}$. Обозначим через $\varphi^*(t)$ функцию, принадлежащую множеству $W_p^r(1,1;[-1,1])$, равную нулю в узлах t_k к.ф. (3.24), обращающуюся в нуль вместе с производными порядка до $r-1$ в точках ζ_j и равную нулю на сегменте $[\zeta_{-1},\zeta_1]$. Покажем, что такая функция существует. В теореме 3.24 главы 1 отмечено, что наилучшая к.ф. типа Эйлора—Маклорена на классе функций $W_p^r(1)$ имеет погрешность $N^{-r}\inf\limits_c\|B_r^*(t)-c\|_{L_q[0,1]}$. Эта оценка справедлива и для множества функций, принадлежащих классу $W_p^r(1)$ и обращающихся в нуль вместе с производными $(r-1)$-го порядка на концах сегмента. Из этого утверждения и леммы С.А. Смоляка следует, что на сегменте $[\zeta_k,\zeta_{k+1}]$ существует функция $\varphi_k^*(t)$, равная нулю в узлах $\{t_l\}$, расположенных в $[\zeta_k,\zeta_{k+1}]$, обращающаяся в нуль вместе с производными порядка $r-1$ на концах сегмента и такая, что

$$\int\limits_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}}\varphi_k^*dt\ge[\zeta_{k+1}-\zeta_k]^{r+1/q}\frac{M_k}{(N_k+1)^r}\inf_c\|B_r^*(t)-c\|_{L_q[0,1]}.$$

Здесь $M_k = \left[\int\limits_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} |\varphi^*(t)|^p dt\right]^{1/p}$; N_k— число узлов к.ф. (3.1), попавших на сегмент $[\zeta_k, \zeta_{k+1}]$.

Введем функцию

$$\varphi^*(t) = \begin{cases} 0 & \mathrm{t} \in [\zeta_{-1}, \zeta_1] \\ \varphi_k^*(t)\mathrm{sgn}\, t & \mathrm{t} \in [\zeta_{-1}, \zeta_1],\ \mathrm{k} \neq -1, 0. \end{cases}$$

Оценим интеграл $\left|\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi^*(t)}{t} dt\right|$. При этом ограничимся оценкой интеграла $\int\limits_{0}^{1} \frac{\varphi^*(t)}{t} dt$.

Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_0^1 \frac{\varphi^*(t)}{t} dt \geq \sum_{k=1}^{L} \int\limits_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \frac{\varphi^*(t)}{t} dt \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{L} \left[\frac{1}{\zeta_{k+1}} \int\limits_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \varphi^*(t) dt + \frac{\zeta_{k+1} - \zeta_k}{\zeta_k \zeta_{k+1}} \int\limits_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \varphi^{*-}(t) dt\right] = I_1 + I_2,$$

где $\varphi^+(t) = [\varphi(t) + |\varphi(t)|]/2$, $\varphi^-(t) = [\varphi(t) - |\varphi(t)|]/2$.

Проведем оценку

$$I_1 = \sum_{k=1}^{L} \frac{1}{\zeta_{k+1}} \int\limits_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \varphi^*(t) dt \geq \sum_{k=1}^{L} \frac{(\zeta_{k+1} - \zeta_k)^{r+1/q}}{\zeta_{k+1}(N_k+1)^r} M_k \inf_c \|B_r^*(t) - c\|_{L_q[0,1]} \geq$$

$$\geq \left[\frac{rq+1}{rq+1-q}\right]^{r+1/q} \inf_c \|B_r^*(t) - c\|_{L_q[0,1]} \frac{1}{N^r} + o\left(\frac{1}{N^r}\right). \qquad (3.3)$$

В этих выкладках величины M_k были положены равными $(1/L)^{1/p}$.

Оценим теперь I_2. Из построения функции $\varphi^*(t)$ следует, что эта функция обращается в нуль вместе с производными до $(r-1)$-го порядка в точках ζ_k. Обозначив $|\zeta_{k+1} - \zeta_k|$ через h_k, имеем

$$\sup_{t \in [\zeta_k, \zeta_{k+1}]} |\varphi^*(t)| \leq \frac{M_k h_k^{r-1/p}}{(r-1)!}.$$

Следовательно,

$$|I_2| = \left| \sum_{k=1}^{L} \frac{\zeta_{k+1} - \zeta_k}{\zeta_k \zeta_{k+1}} \int\limits_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \varphi^{*-}(t) \right| \le o(N^{-r}). \tag{3.4}$$

Из оценок (3.3)—(3.4) имеем

$$\zeta_N \Big[W^r L_p(1) \Big] \ge \frac{2 + o(1)}{N^r} \left[\frac{rq+1}{rq+1-q} \right]^{r+1/q} \inf_c \|B_r^*(t) - c\|_{L_q[0,1]}.$$

Оценим погрешность к.ф. (3.2). Нетрудно видеть, что

$$R_N(\varphi) \le \left| \int\limits_{t_{-1}^*}^{t_1^*} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau - \sum_{k=1}^{r-1} \varphi^{(k)}(0) \frac{(1-(-1)^k)}{k!k} t_1^{*k} \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k=1}^{r-1} \Big[\varphi^{(k)}(0) - \Pi_{n,r,p}\big[\varphi^k(0)\big] \Big] \frac{(1-(-1)^k)}{k!k} t_1^{*k} \right| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{L} \left| \int\limits_{t_k^*}^{t_{k+1}^*} \left[\varphi(\tau) - \sum_{l=0}^{r-1} \varphi^{(l)}(t_k^*) \frac{(\tau - t_k^*)^l}{l!} \right] \left[\frac{1}{\tau} - \frac{1}{t_k^*} \right] \right| d\tau +$$

$$+ \sum_{k=1}^{L} \left| \sum_{l=0}^{r-1} \Big[\varphi^{(l)}(t_k^*) - \Pi_{n,r,p}\big[\varphi^{(l)}(t_k^*)\big] \Big] \ln \frac{t_{k+1}^*}{t_k^*} \right| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{L} \frac{1}{t_k^*} \left| \int\limits_{t_k^*}^{t_{k+1}^*} \varphi(\tau) d\tau - l_{M,r,p}\big[\varphi; [t_k^*, t_{k+1}^*]\big] \right| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{L} \int\limits_{t_{-k-1}^*}^{t_{-k}^*} \left[\varphi(\tau) - \sum_{l=0}^{r-1} \varphi^{(l)}(t_{-k}^*) \frac{(\tau - t_{-k}^*)}{l!} \right] \left[\frac{1}{\tau} - \frac{1}{t_{-k}^*} \right] d\tau +$$

$$+ \sum_{k=1}^{L} \left| \sum_{l=0}^{r-1} \Big[\varphi^{(l)}(t_{-k}^*) - \Pi_{n,r,p}\big[\varphi^{(l)}(t_{-k}^*)\big] \Big] \ln \frac{t_{-k}^*}{t_{-k-1}^*} \right| +$$

$$+\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{t^*_{-k}}\left|\int\limits_{t^*_{-k-1}}^{t^*_{-k}}\varphi(\tau)d\tau-l_{M,r,p}\big[\varphi;[t^*_{-k-1},t^*_{-k}]\big]\right|\leq$$

$$\leq\frac{2+o(1)}{N^r}\inf_c\|B^*_r(t)-c\|_{L_q[0,1]}\left[\frac{rq+1}{rq+1-q}\right]^{r+1/q}.$$

Теорема доказана.

4. Гауссовские квадратурные формулы

Рассмотрим сингулярный интеграл вида

$$J\varphi=\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau, \tag{4.1}$$

где функция $\varphi(\tau)\in W^r(1)$, $\tau\in\Omega=[-1,1]$. В качестве метода вычисления используются квадратурные формулы вида

$$J\varphi=\sum_{k=-N}^{N}{}'\sum_{l=0}^{\rho}p_{kl}\varphi^{(l)}(t_k)+R_N(p_{kl},t_k,\varphi), \tag{4.2}$$

где $-1\leq t_{-N}<\cdots<t_{-1}<0<t_1<\cdots<t_N\leq 1,\sum'-$ означает суммирование по $k\neq 0$.

Для вычисления сингулярного интеграла вида (4.1) на классе $W^r(1)$, построим квадратурную формулу, которая будучи оптимальной по порядку значительно проще реализуется, чем квадратурные формулы, приведенные в предыдущих параграфах.

Разобьем сегмент $[-1,1]$ на $2N$ частей точками

$$t_{\pm k}=\pm\left(\frac{k}{N}\right)^v,\ k=1,\ldots,N,\quad v=\frac{r+1}{r}.$$

Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_r$ ($\xi_1,\ldots,\xi_r\in[-1,1]$) — узлы полинома Лежандра степени r. При отображении сегмента $[-1,1]$ на сегмент $[t_k,t_{k+1}]$ узлы $\xi_1,\ldots,\xi_r$ отобразятся в узлы $\xi_1^k,\ldots,\xi_r^k$. Через $P_r(\varphi,[t_k,t_{k+1}])$ обозначим интерполяционный полином, построенный по узлам $\xi_1^k,\ldots,\xi_r^k$. Так как из контекста ясно, какому сегменту $[t_k,t_{k+1}]$ будут принадлежать узлы $\xi_1^k,\ldots,\xi_r^k$, то дополнительные индексы, указывающие сегмент, ниже опускаются.

Теорема 4.1 [44], [45]. Среди всевозможных квадратурных формул вида (4.2) оптимальной по порядку на классе $W^r(1)$ является формула

$$J\varphi = \sum_{k=1}^{N-1} \left(\int\limits_{t_{-k-1}}^{t_{-k}} P_r\left(\frac{\varphi(\tau)}{\tau}, [t_{-k-1}, t_{-k}]\right) d\tau + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} P_r\left(\frac{\varphi(\tau)}{\tau}, [t_k, t_{k+1}]\right) d\tau \right) +$$

$$+ \int\limits_{t_{-1}}^{t_1} P_r\left(\frac{\varphi(\tau) - \varphi(0)}{\tau}\right) d\tau + R_N(\varphi). \tag{4.3}$$

Ее погрешность

$$R_N[\Psi] = (1 + o(1)) \frac{2^{2r+1} r!(r+1)^{r+1}}{(2r)! r^{r+1} N^r}. \tag{4.4}$$

Замечание. Из сопоставления утверждений теоремы 4.1 и теоремы 1.2 следует, что квадратурная формула (4.3) асимтотически оптимальна при $r = 1$.

Доказательство теоремы 4.1. Оценим погрешность квадратурной формулы (4.3). Эта погрешность может быть оценена неравенством

$$|R_N(\varphi)| \le \left| \sum_{k=1}^{N-1} \int\limits_{t_{-k-1}}^{t_{-k}} \left(\frac{\varphi(\tau) - \varphi(0)}{\tau} - P_r\left(\frac{\varphi(\tau) - \varphi(0)}{\tau}, [t_{-k-1}, t_{-k}]\right)\right) d\tau + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{N-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{\varphi(\tau) - \varphi(0)}{\tau} - P_r\left(\frac{\varphi(\tau) - \varphi(0)}{\tau}, [t_k, t_{k+1}]\right)\right) d\tau \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{t_{-1}}^{t_1} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(0)}{\tau} d\tau - \int\limits_{t_{-1}}^{t_1} P_r\left(\frac{\varphi(\tau) - \varphi(0)}{\tau}\right) d\tau \right| \le$$

$$\le \left| \sum_{k=1}^{N-1} \int\limits_{t_{-k-1}}^{t_{-k}} \left(\frac{\varphi(\tau) - T_{r-1}(\varphi, \tau)}{\tau} - P_r\left(\frac{\varphi(\tau) - T_{r-1}(\varphi, \tau)}{\tau}, [t_{-k-1}, t_{-k}]\right)\right) d\tau \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k=1}^{N-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{\varphi(\tau) - T_{r-1}(\varphi, \tau)}{\tau} - P_r\left(\frac{\varphi(\tau) - T_{r-1}(\varphi, \tau)}{\tau}, [t_k, t_{k+1}]\right)\right) d\tau \right| +$$

$$+\left|\int\limits_{t_{-1}}^{t_1}\frac{\varphi(\tau)-T_{r-1}(\varphi,\tau)}{\tau}d\tau-\int\limits_{t_{-1}}^{t_1}P_r\left(\frac{\varphi(\tau)-T_{r-1}(\varphi,\tau)}{\tau},[t_{-1},t_1]\right)d\tau\right|=$$

$$=r_1+r_2+r_3,$$

где $T_{r-1}(\varphi,\tau)=\varphi(0)-\frac{\varphi'(0)}{1!}\tau-\dots-\frac{\varphi^{(r-1)}(0)}{(r-1)!}\tau^{r-1}$.

Оценим каждое слагаемое в отдельности.

Оценим r_2 (r_1 оценивается аналогично):

$$r_2=\left|\sum_{k=1}^{N-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}R_r\left(\frac{\varphi(\tau)-T_{r-1}(\varphi,\tau)}{\tau}\right)d\tau\right|=$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{N-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}R_r\left(\frac{\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^{\tau}\varphi^{(r)}(v)(\tau-v)^{r-1}dv}{\tau}\right)d\tau\right|, \qquad (4.5)$$

где $R_r=E-P_r,\ E-$тождественный оператор.

Из леммы 3.3. главы 1 следует, что

$$|f(x)-P_r(f,[-1,1])|\le\frac{1}{(2r)!}\max_{-1<\zeta<1}|f^{(r)}(\zeta)|.$$

Нетрудно видеть, что при $k\neq 0$

$$\max_{\tau\in[t_k,t_{k+1}]}\left|\left(\frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\tau}\varphi^{(r)}(v)(\tau-v)^{r-1}dv\right)^{(r)}\right|\le\frac{1}{|t_k|}\sum_{i=0}^{r-1}C_r^i(r-1)!.$$

Поэтому

$$r_2\le\left|\sum_{k=1}^{N-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}R_r\left(\frac{\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^{\tau}\varphi^{(r)}(v)(\tau-v)^{r-1}dv}{\tau}\right)d\tau\right|\le$$

$$\le\frac{1}{(r-1)!}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{2^r r!(t_{k+1}-t_k)^{r+1}}{(2r)!}\max_{t_k\le\tau\le t_{k+1}}\left|\left(\frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\tau}\varphi^{(r)}(v)(\tau-v)^{r-1}dv\right)^{(r)}\right|\le$$

$$\leq \frac{2^r r!}{(r-1)!(2r)!} \sum_{i=0}^{r-1} C_r^i (r-1)! \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(t_{k+1}-t_k)^{r+1}}{t_k} =$$

$$= \frac{2^r r!}{(2r)!} \sum_{i=0}^{r-1} C_r^i \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\left(((k+1)/N)^{(r+1)/r} - (k/N)^{(r+1)/r}\right)^{r+1}}{(k/N)^{(r+1)/r}} =$$

$$= \frac{2^r r!(r+1)^{r+1}}{(2r)! r^{r+1}} \sum_{i=0}^{r-1} C_r^i N^{-r}. \tag{4.6}$$

Аналогично

$$r_1 = \frac{2^r r!(r+1)^{r+1}}{(2r)! r^{r+1}} \sum_{i=0}^{r-1} C_r^i N^{-r}. \tag{4.7}$$

Оценим слагаемое r_3 :

$$r_3 = \left| \int_{t_{-1}}^{t_1} R_r \left(\frac{\varphi(\tau) - T_{r-1}(\varphi, \tau)}{\tau} \right) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(r-1)!} \left| \int_{t_{-1}}^{t_1} R_r \left(\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \varphi^{(r)}(v)(\tau - v)^{r-1} dv \right) d\tau \right| = v_1.$$

Оценим $r-1$ производную от функции $\psi(\tau) = \dfrac{1}{\tau} \displaystyle\int_0^{\tau} \varphi^{(r)}(v)(\tau -$ $- v)^{r-1} dv$. Очевидно, при $\tau \neq 0$

$$\left| \left(\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \varphi^{(r)}(v)(\tau - v)^{r-1} dv \right)^{(r-1)} \right| \leq \sum_{i=0}^{r-1} C_{r-1}^i \frac{(r-1)!}{(r-i)}.$$

При $\tau = 0$ положим $\psi(0) = \lim\limits_{t \to 0} \psi(t) = 0$. Последовательным дифференцированием можно показать, что $\psi'(0) = \cdots = \psi^{(r-2)}(0) = 0$, $\psi^{(r-1)}(0) = \sum\limits_{i=0}^{r-1} C_{r-1}^i \frac{(r-1)!}{(r-i)}$.

Тогда

$$r_3 \leq \frac{1}{(r-1)!(2r)!} \sum_{i=0}^{r-1} C_{r-1}^i \frac{(r-1)!}{(r-i)} (t_1 - t_{-1})^r =$$

$$= \frac{1}{(2r)!}\sum_{i=0}^{r-1}\frac{C_{r-1}^{i}}{(r-i)}\left(\left(\frac{1}{N}\right)^{(r+1)/r} - \left(\frac{-1}{N}\right)^{(r+1)/r}\right)^{r} =$$

$$= \frac{2^r r!}{(2r)!}\sum_{i=0}^{r-1}\frac{C_{r-1}^{i}}{(r-i)}(1-(-1)^{(r+1)/r})^r N^{-(r+1)} = o(N^{-r}). \qquad (4.8)$$

Собирая оценки (4.6)—(4.8), получаем

$$R_N[\Psi] = (1+o(1))\frac{2(r+1)^{r+1}}{(2r)!r^{r+1}}\sum_{i=0}^{r-1}C_r^i N^{-r} =$$

$$= (1+o(1))\frac{2^r(r+1)^{r+1}}{(2r)!r^{r+1}N^r}.$$

Теорема доказана.

Следствием теоремы 4.1 является следующее утверждение, которое приводим без доказательства.

Теорема 4.2 [44], [45]. Квадратурная формула

$$J\varphi = \sum_{k=1}^{N-1}\left(\int\limits_{t_{-k-1}}^{t_{-k}} P_r\left(\frac{\varphi(\tau)-\varphi(0)}{\tau}, [t_{-k-1}, t_{-k}]\right)d\tau + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} P_r\left(\frac{\varphi(\tau)-\varphi(0)}{\tau}, [t_k, t_{k+1}]\right)d\tau\right) +$$

$$+ \int\limits_{t_{-1}}^{t_1} P_r\left(\frac{\varphi(\tau)-\varphi(0)}{\tau}, [t_{-1}, t_1]\right)d\tau + R_N(\varphi)$$

точна для полиномов $2r-2-$ й степени. Погрешность этой формулы определяется равенством (4.4).

5. Оптимальные методы вычисления сингулярных интегралов на бесконечной прямой

В этом параграфе исследуются методы вычисления сингулярных интегралов вида

$$J\varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau \qquad (5.1)$$

на классах функций $H_{\alpha,\rho}$ и $W^r_\rho(1)$. Для определенности положим $\rho(t_1,t_2)=\rho_1(t_1,t_2)=(\rho_0(t_1,t_2))^\lambda$ при определении класса $H_{\alpha,\rho}$ и $\rho(t)=$ $=\rho_1(t)=(\rho_0(t))^\lambda$ при определении класса $W^r_\rho(1)$. Описание весовых функций $\rho_0(t_1,t_2)$ и $(\rho_0(t))$ приведено во втором параграфе главы 1.

При вычислении интегралов на классе $H_{\alpha,\rho}$ используется квадратурная формула

$$J\varphi=\sum_{k=-N}^{N}{}'p_k\varphi(t_k)+R_N(t_k,p_k,\varphi), \tag{5.2}$$

где $-\infty\le t_{-N}<\dots<t_{-1}\le 0\le t_1<\dots<t_N\le\infty$, $\sum'$ означает суммирование по $k\ne 0$.

Введем квадратурную формулу

$$J\varphi=\sum_{k=-N_1}^{N_1-1}{}''\varphi(t'_k)\ln(t_{k+1}/t_k)-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=M_0}^{M_1-1}\varphi(v'_k)\left((v_k)^{-\lambda}-(v_{k+1})^{-\lambda}\right)-$$

$$-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=M_0}^{M_1-1}\varphi(v'_{-k})\left((v_{-k-1})^{-\lambda}-(v_{-k})^{-\lambda}\right)+\frac{1}{\lambda A^\lambda}(\varphi(A)-\varphi(-A))+$$

$$+R_N(\varphi), \tag{5.3}$$

где

$$t_{\pm k}=\pm(k/N_1)^{(1+\alpha)/\alpha},\ t'_{\pm k}=(t_{\pm k}+t_{\pm k\pm 1})/2,\ k=1,2,\dots,N_1,$$

$$v_{\pm k}=\pm(M_1/k)^{(1+\alpha)/(\lambda-\alpha)},\ k=M_0,M_0{+}1,\dots,M_1;\ N_2{-}2\le M_1{-}M_0\le N_2,$$

$$M_0=\left[N_2/(A^{(\lambda-\alpha)/(1+\alpha)}-1)\right],M_1=\left[A^{(\lambda-\alpha)/(1+\alpha)}N_2/(A^{(\lambda-\alpha)/(1+\alpha)}-1)\right],$$

$$v'_{\pm k}=(v_{\pm k}+v_{\pm k\pm 1})/2,\ k=M_0,M_0+1,\dots,M_1-1,$$

$$N_1=\left[N\frac{(\lambda-\alpha)A^{(\lambda-\alpha)/(1+\alpha)}}{\lambda A^{(\lambda-\alpha)/(1+\alpha)}-\alpha}\right],\ N_2=\left[N\frac{(A^{(\lambda-\alpha)/(1+\alpha)}-1)\alpha}{\lambda A^{(\lambda-\alpha)/(1+\alpha)}-\alpha}\right],$$

$N-2=N_1+N_2\le N$, $\sum''$ означает суммирование по $k\ne 0,-1$, $[\alpha]-$ целая часть числа α.

Теорема 5.1 [42]. Пусть $\Psi=H_{\alpha,\rho}(1)$. Среди всевозможных квадратурных формул вида (5.2) асимптотически оптимальной является фомула (5.3), имеющая погрешность

$$R_N[\Psi]=L(N),$$

где

$$L(N) = 2(1+o(1))\left[\frac{(\lambda A^{(\lambda-\alpha)/(1+\alpha)}-\alpha)^{\alpha}}{N^{\alpha}}\left(\frac{C_1(\lambda-\alpha)^{-\alpha}}{A^{\alpha(\lambda-\alpha)/(1+\alpha)}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{C_2\alpha^{-\alpha}}{(A^{(\lambda-\alpha)/(1+\alpha)}-1)^{\alpha}}\right)+\frac{B(\alpha+1,\lambda-\alpha)}{A^{\lambda-\alpha}}\right],$$

$$C_1 = \frac{(1+\alpha)^{\alpha}}{2^{\alpha}\alpha^{1+\alpha}},\ C_2 = \left(\frac{1+\alpha}{\lambda-\alpha}\right)^{1+\alpha}\frac{(A^{(\lambda-\alpha)/(1+\alpha)}-1)^{1+\alpha}}{A^{\lambda-\alpha}2^{\alpha}(1+\alpha)}.$$

$$A = \left(\frac{2N\alpha(\lambda-\alpha)^{(\alpha+1)/\alpha}}{\lambda(1+\alpha)}(B(\alpha+1,\lambda-\alpha))^{1/\alpha}+\frac{\alpha}{\lambda}\right)^{(1+\alpha)/(\lambda-\alpha)},$$

$B(\alpha,\lambda)-$ бета-функция.

Доказательство теоремы 5.1. Вначале остановимся на оценке снизу величины $\zeta_N[\Psi]$. Учитывая симметричность квадратурной формулы (5.2), достаточно ограничиться рассмотрением промежутка $[0,\infty)$. Предположим, что узлы квадратурной формулы (5.2) расположены на сегменте $[-A,A]$, и разобьем промежуток $[0,\infty)$ на три части: $[0,1]$, $[1,A]$, $[A,\infty)$. Пусть N_1 — число узлов t_k квадратурной формулы (5.2), расположенных на сегменте $[0,1]$, N_2 — число узлов t_k квадратурной формулы (5.2), расположенных на сегменте $[1,A]$. Для определенности будем считать, что $N_1+N_2=N$.

Повторяя рассуждения, проведенные в §1, убеждаемся в том, что при произвольных узлах $t_k,\ 1\le k\le N_1,\ 0\le t_k\le 1$,

$$\sup\int\limits_0^1\frac{\varphi(\tau)}{\tau}\ge(1+o(1))(1+\alpha)^{\alpha}/2^{\alpha}\alpha^{1+\alpha}N_1^{\alpha}, \tag{5.4}$$

где supremum берется по всевозможным функциям $\varphi(\tau)$, принадлежащим классу $H_\alpha(1)$ на сегменте $[0,1]$ и обращающимся в нуль в точках $0,\ t_k,\ 1\le k\le N_1$.

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_1^A\frac{f(\tau)}{\tau}d\tau.$$

Воспользовавшись утверждениями теоремы 3.26, приведенной в главе 1, имеем

$$\sup \int\limits_1^A \frac{\varphi(\tau)}{\tau^{\lambda+1}} d\tau \geq$$

$$\geq (1+o(1)) \left(\frac{1+\alpha}{\lambda-\alpha}\right)^{1+\alpha} \frac{(A^{(\lambda-\alpha)/(1+\alpha)}-1)^{1+\alpha}}{A^{\lambda-\alpha} 2^{\alpha}(1+\alpha) N_2^{\alpha}}, \tag{5.5}$$

где supremum берется по всевозможным функциям $\varphi(t) \in H_\alpha(1)$, обращающимся в нуль в точках $1, A$ и узлах t_k, расположенных на сегменте $[1, A]$.

Воспользовавшись формулой (24) на с.298 монографии [126], приходим к неравенству

$$\sup \int\limits_A^\infty \frac{\varphi(\tau)}{\tau^{\lambda+1}} d\tau \geq \int\limits_A^\infty \frac{(\tau-A)^\alpha}{\tau^{\lambda+1}} d\tau =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{\tau^\alpha}{(\tau+A)^{\lambda+1}} d\tau = A^{\alpha-\lambda} B(\alpha+1, \lambda-\alpha), \tag{5.6}$$

где $B(\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$—бета-функция, $\Gamma(\alpha)$— гамма-функция, а supremum берется по всевозможным функциям $\varphi(\tau) \in H_\alpha(1)$ и обращающимся в нуль в узлах $t_k,\ 1 \leq k \leq N$ и в точке A.

Найдем наилучшее распределение узлов N_1 и N_2 на сегментах $[0,1]$ и $[1, A]$. Для этого нужно найти минимум функции

$$V(N_1, N_2) = C_1 N_1^{-\alpha} + C_2 N_2^{-\alpha} + A^{\alpha-\lambda} B(\alpha+1, \lambda-\alpha)$$

при дополнительном условии $N_1 + N_2 = N$. Здесь

$$C_1 = \frac{(1+\alpha)^\alpha}{2^\alpha \alpha^{1+\alpha}},\ C_2 = \left(\frac{1+\alpha}{\lambda-\alpha}\right)^{1+\alpha} \frac{1}{A^{\lambda-\alpha}} (A^{(\lambda-\alpha)/(1+\alpha)}-1)^{1+\alpha} \frac{1}{2^\alpha(1+\alpha)}.$$

Решая задачу на условный экстремум, имеем:

$$N_1 = \left[N \frac{(\lambda-\alpha) A^{(\lambda-\alpha)/(1+\alpha)}}{\lambda A^{(\lambda-\alpha)/(1+\alpha)} - \alpha}\right],\ N_2 = \left[N \frac{(A^{(\lambda-\alpha)/(1+\alpha)}-1)\alpha}{\lambda A^{(\lambda-\alpha)/(1+\alpha)} - \alpha}\right],$$

$$A=\left(\frac{2N\alpha(\lambda-\alpha)^{(\alpha+1)/\alpha}}{\lambda(1+\alpha)}(B(\alpha+1,\lambda-\alpha))^{1/\alpha}+\frac{\alpha}{\lambda}\right)^{(1+\alpha)/(\lambda-\alpha)}. \qquad (5.7)$$

Таким образом, $\zeta_N[\Psi]=L(N)$. Оценка снизу получена.

Оценим погрешность квадратурной формулы (5.3). Нетрудно видеть, что

$$|R_N(\varphi)|\le\left|\int\limits_{t_{-1}}^{t_1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau-\int\limits_{t_{-1}}^{t_1}\frac{\varphi(0)}{\tau}d\tau\right|+2\sum_{k=1}^{N_1-1}\left|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t'_k)}{\tau}d\tau\right|+$$

$$+2\sum_{k=M_0}^{M_1-1}\left|\int\limits_{v_{k+1}}^{v_k}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(v'_k)}{\tau^{1+\lambda}}d\tau\right|+2\left|\int\limits_{A}^{\infty}\frac{(\tau-A)^\alpha}{\tau^{1+\lambda}}d\tau\right|=$$

$$=r_1+r_2+r_3+r_4. \qquad (5.8)$$

Оценим каждое слагаемое r_1,r_2,r_3,r_4 в отдельности. Слагаемые r_1 и r_2 были оценены в разд. 1:

$$r_1=2N_1^{-(1+\alpha)}\alpha^{-1}=o(N_1^{-\alpha}), \qquad (5.9)$$

$$r_2=(1+o(1))2^{1-\alpha}(1+\alpha)^\alpha/\alpha^{1+\alpha}N_1^\alpha. \qquad (5.10)$$

Очевидно,

$$r_3\le 2\sum_{k=M_0}^{M_1-1}\frac{1}{v_{k+1}^{1+\lambda}}\left(\frac{v_k-v_{k+1}}{2}\right)^{1+\alpha}\frac{2}{1+\alpha}=$$

$$=(1+o(1))\frac{2^{1-\alpha}}{1+\alpha}\left(\frac{1+\alpha}{\lambda-\alpha}\right)^{1+\alpha}\frac{1}{N_2^\alpha}\frac{(A^{(\lambda-\alpha)/(1+\alpha)}-1)^{1+\alpha}}{A^{\lambda-\alpha}}; \qquad (5.11)$$

$$r_4=2\int\limits_{A}^{\infty}\frac{(\tau-A)^\alpha}{\tau^{1+\lambda}}d\tau=\frac{2B(\alpha+1,\lambda-\alpha)}{A^{\lambda-\alpha}}. \qquad (5.12)$$

Из полученных оценок (5.9)—(5.12) имеем $R_N[\Psi]\le L(N)$.

Сопоставляя эту оценку с оценкой снизу, убеждаемся в справедливости теоремы .

Интеграл (5.1) на классе функций $W_\rho^r(1)$ будем вычислять по квадратурной формуле

$$J\varphi=\sum_{k=-N}^{N}\sum_{l=0}^{\beta}p_{kl}\varphi^{(l)}(t_k)+R_N(\varphi), \qquad (5.13)$$

где $-A \le t_{-N} < \dots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \dots < t_N \le A, 0 \le \beta \le r$.

В параграфе 1 (см. разд. 1.1) описано построение полинома $\tilde{f}(\sigma, [v_k, v_{k+1}])$, аппроксимирующего функцию $f(\sigma)$ на сегменте $[v_k, v_{k+1}]$.

Теорема 5.2 [42]. Среди всевозможных квадратурных формул вида (5.13) на классе $W^r_\rho(1)$ при $\beta = r-1$ $(r = 1, 2, \dots)$ асимптотически оптимальной является квадратурная формула

$$J\varphi = \sum_{k=1}^{M-1} \left(\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\tilde{f}(\tau, [t_k, t_{k+1}])}{\tau} d\tau + \int\limits_{t_{-k-1}}^{t_{-k}} \frac{\tilde{f}(\tau, [t_{-k-1}, t_{-k}])}{\tau} d\tau \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!\,k} M^{-k(r+1)/r} \left(1 - (-1)^k\right) +$$

$$+ \sum_{k=M_0}^{M_1-1} \left(\int\limits_{v_{k+1}}^{v_k} \frac{\tilde{f}(\tau, [v_{k+1}, v_k])}{\tau} d\tau + \int\limits_{v_{-k}}^{v_{-k-1}} \frac{\tilde{f}(\tau, [v_{-k}, v_{-k-1}])}{\tau} d\tau \right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\varphi^{(k)}(A) - (-1)^k \varphi^{(k)}(-A)}{k!} \cdot \frac{D(k, \lambda)}{(\lambda - k) A^{\lambda - k}} + R_N(\varphi), \qquad (5.14)$$

где

$$t_{\pm k} = \pm \left(\frac{k}{M} \right)^{(r+1)/r}, \ k = 0, 1, \dots, M,$$

$$v_{\pm k} = \pm \left(\frac{M_1}{k} \right)^{(r+1)/(\lambda - r)}, \ k = M_0, M_0 + 1, \dots, M_1,$$

$$M_0 = \left[\frac{n}{A^{(\lambda-r)/(r+1)} - 1} \right], \quad M_1 = \left[\frac{n A^{(\lambda-r)/(r+1)}}{A^{(\lambda-r)/(r+1)} - 1} \right],$$

$$n = \left[\frac{r \left(A^{(\lambda-r)/(r+1)} - 1 \right)}{\lambda A^{(\lambda-r)/(r+1)} - r} N \right], \quad M = \left[\frac{A^{(\lambda-r)/(r+1)} (\lambda - r)}{\lambda A^{(\lambda-r)/(r+1)} - r} N \right],$$

$$D(r, \lambda) = \sum_{k=0}^{r} \frac{r! (-1)^k (\lambda - r)}{k! (r-k)! (\lambda - r + k)}.$$

Погрешность квадратурной формулы (5.14) равна

$$R_N[\Psi] = (1 + o(1)) \frac{(r+1)^{r+1}}{2^{2r-1} r^r r! (\lambda - r)^r} \left(\frac{C_1 (r+1)}{C_2 r} + \frac{\lambda^r}{\lambda - r} \right) \frac{1}{N^r},$$

где

$$C_1 = \frac{D(r,\lambda)}{(\lambda - r)r!},\ C_2 = \frac{(r+1)^{r+1}}{(\lambda - r)^{r+1}4^r r^r r!}.$$

Доказательство теоремы 5.2. Вначале остановимся на оценке снизу. Учитывая симметричность формулы (5.13), достаточно ограничиться рассмотрением промежутка $[0,\infty)$ при условии $f(0)=0$. Пусть узлы квадратурной формулы (5.13) расположены на сегменте $[0,A]$ и промежуток $[0,\infty)$ разбит на три части: $[0,1],[1,A],[A,\infty)$. Обозначим через M число узлов t_k квадратурной формулы (5.13), расположенных на сегменте $[0,1]$, $n_1 = M_1 - M_0 + 1-$ число узлов v_k, расположенных на сегменте $[1,A]$. Очевидно, $M + n_1 = N,\ n_1 = n$ или $n_1 = n+1$.

В разд. 1 было показано, что при вычислении интеграла $\int\limits_0^1 \frac{f(\tau)}{\tau}d\tau$ на классе функций $W^r(1)$ справедлива оценка

$$\zeta_M(W^r(1)) \geq (1+o(1))((r+1)/r)^{r+1}/4^r r!\ M^r. \tag{5.15}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_1^A \frac{f(\tau)}{\tau}d\tau.$$

Введем обозначения:

$$v_k^* = \left(\frac{M_1}{M_0 + k[\ \ln n]}\right)^{(r+1)/(\lambda - r)},\ k = 0,1,\ldots,s,$$

$$v_{s+1}^* = 1, s = [(M_1 - M_0)/[\ln n]];$$

N_k- число узлов квадратурной формулы в сегменте $\Delta_k = [v_k^*, v_{k+1}^*]$; $k = 0,1,\ldots,s$, $f^+(t) = (f(t) + |f(t)|)/2$, $f^-(t) = (f(t) - |f(t)|)/2$; $\{w_k\}-$ объединение узлов $\{v_k^*\}$ и узлов $\{t_k\}$, принадлежащих $[1,A]$.

При получении оценки снизу на сегменте $[1,A]$ построим функцию $\varphi^*(t)$, принадлежащую классу $W_\rho^r(1)$, обращающуюся в нуль вместе со своими производными до $r-1$ порядка включительно в узлах w_k, $k = 1,\ldots,M_1 - M_0 + s + 1$ и удовлетворяющую неравенству

$$\int\limits_{v_{k+1}^*}^{v_k^*} \varphi^*(\tau)d\tau \geq 0.$$

Тогда

$$\int\limits_1^A \frac{\varphi^*(\tau)}{\tau} d\tau = \sum_{k=0}^{s} \int\limits_{v_{k+1}^*}^{v_k^*} \frac{\varphi^*(\tau)}{\tau^{\lambda+1}} d\tau \geq$$

$$\geq \sum_{k=0}^{s} \frac{1}{(v_k^*)^{\lambda+1}} \int\limits_{v_{k+1}^*}^{v_k^*} \varphi^*(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{s} \frac{(v_k^*)^{\lambda+1} - (v_{k+1}^*)^{\lambda+1}}{(v_k^* \ v_{k+1}^*)^{\lambda+1}} \int\limits_{v_{k+1}^*}^{v_k^*} \varphi^{*-}(\tau) d\tau =$$

$$= I_3 + I_4.$$

Используя теорему 3.19 главы 1 и лемму С.А. Смоляка, получаем оценку

$$\sup_{\varphi^* \in W^r(1); \varphi^{(j)}(v_i)=0} \int\limits_{v_{k+1}^*}^{v_k^*} \varphi^*(\tau) d\tau \geq \frac{\left(v_k^* - v_{k+1}^*\right)^{r+1}}{r! \left[4(N_k+1) + 2\sqrt[r]{r+1}\ \right]^r}.$$

Тогда

$$I_3 = \sum_{k=0}^{s} \frac{1}{(v_k^*)^{\lambda+1}} \int\limits_{v_{k+1}^*}^{v_k^*} \varphi^*(\tau) d\tau \geq$$

$$\geq \frac{[\ \ln n]^{r+1} (A^{(\lambda-r)/(r+1)} - 1)^{r+1}}{n^{r+1} A^{\lambda-r} r!} \left(\frac{r+1}{\lambda - r}\right)^{r+1} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{s} \frac{1}{[4(N_k+1) + 2\sqrt[r]{r+1}\ ]^r}.$$

Осталось найти распределение узлов N_k, минимизирующих сумму

$$V = \sum_{k=0}^{s} \frac{1}{[4(N_k+1) + 2\sqrt[r]{r+1}\ ]^r}$$

при условии

$$\sum_{k=0}^{s} N_k = n.$$

Стандартные методы математического анализа дают возможность обнаружить, что точка

$$N_0 = \cdots = N_s = [\ \ln n]$$

доставляет минимум сумме V при условии целочисленности значений N_k, $k = 0, 1, \ldots, s$. Следовательно,

$$I_3 \geq \frac{(A^{(\lambda-r)/(r+1)} - 1)^{r+1}}{n^r A^{\lambda-r} r! 4^r} \left(\frac{r+1}{\lambda-r}\right)^{r+1} (1 + o(1)).$$

Оценим I_4:

$$I_4 = \sum_{k=0}^{s} \frac{(v_k^*)^{\lambda+1} - (v_{k+1}^*)^{\lambda+1}}{(v_k^* \; v_{k+1}^*)^{\lambda+1}} \int\limits_{v_{k+1}^*}^{v_k^*} \varphi^{*-}(\tau) d\tau \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{s} \frac{[\ \ln n]^{(r+1)(\lambda+1)/(\lambda-r)} k^{(2r+2r\lambda-\lambda^2-1)/(\lambda-r)}}{M_1^{(r+1)(\lambda+1)/(\lambda-r)}} \int\limits_{v_{k+1}^*}^{v_k^*} \varphi^{*-}(\tau) d\tau.$$

По построению в каждом сегменте $[v_{k+1}^*, v_k^*]$ имеется, по крайней мере, по одному узлу, в котором функция $\varphi^*(t)$ вместе с ее производными до $r-1$ порядка обращается в нуль.

Возьмем в каждом сегменте по одному такому узлу и обозначим его через v_k^{**} $(k = 0, 1, \ldots, s)$. В сегменте $[v_{k+1}^*, v_k^*]$ функция $\varphi^*(t)$ может быть представлена в виде

$$\varphi^*(\tau) = \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_{v_k^{**}}^{\tau} (\tau - t)^{r-1} \varphi^{*(r)}(t) dt$$

и, следовательно,

$$\left| \int\limits_{v_{k+1}^*}^{v_k^*} \varphi^{*-}(\tau) d\tau \right| \leq \int\limits_{v_{k+1}^*}^{v_k^*} |\varphi^*(\tau)| d\tau \leq \frac{1}{(r+1)!} (v_k^* - v_{k+1}^*)^{r+1}.$$

Поэтому $|I_4| = o(n^{-r})$.

Отсюда и из оценки I_3 следует, что верхняя грань оценки снизу вычисления интеграла на сегменте $[1, A]$ по различным квадратурным формулам, использующим $M_1 - M_0 + 1$ узлов, не меньше величины

$$(1 + o(1)) \frac{(A^{(\lambda-r)/(r+1)} - 1)^{r+1}}{n^r A^{\lambda-r} r! \; 4^r} \left(\frac{r+1}{\lambda-r}\right)^{r+1}. \tag{5.16}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_A^\infty \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \ .$$

Используя формулу (24) на с.298 книги [126], приходим к неравенству:

$$\sup_{\varphi \in W_\rho^r(1)} \int\limits_A^\infty \frac{\varphi(\tau)}{\tau^{\lambda+1}} d\tau \geq \frac{1}{r!} \int\limits_A^\infty \frac{(\tau - A)^r}{\tau^{\lambda+1}} d\tau = \frac{D(r,\lambda)}{r!\ (\lambda - r) A^{\lambda - r}}, \tag{5.17}$$

где

$$D(r,\lambda) = \sum_{k=0}^{r} \frac{r!(-1)^k(\lambda - r)}{k!(r-k)!(\lambda - r + k)}$$

константа, которая зависит от r и λ.

Найдем наилучшее распределение узлов M и n между сегментами $[0,1]$ и $[1,A]$. Для этого нужно найти минимум функции

$$F(n,M) = \frac{(r+1)^{r+1}}{4^r r!\ r^{r+1} M^r} +$$

$$+ \frac{(A^{(\lambda-r)/(r+1)} - 1)^{r+1}(r+1)^{r+1}}{4^r r!\ n^r A^{\lambda - r}(\lambda - r)^{r+1}} + \frac{D(r,\lambda)}{r!(\lambda - r) A^{\lambda - r}}$$

при условии $n + M = N$. Минимум достигается при

$$n = \left[\frac{(A^{(\lambda-r)/(r+1)} - 1) r}{A^{(\lambda-r)/(r+1)} \lambda - r} N \right], \quad M = \left[\frac{A^{(\lambda-r)/(r+1)} (\lambda - r)}{A^{(\lambda-r)/(r+1)} \lambda - r} N \right].$$

$$A = \left(\frac{4Nr(\lambda - r)}{\lambda (r+1)^{(r+1)/r}} (D(r,\lambda))^{1/r} + \frac{r}{\lambda} \right)^{(r+1)/(\lambda - r)} . \tag{5.18}$$

Из соотношений (5.15)—(5.18) следует оценка снизу

$$\zeta_N[\Psi] \geq \frac{(1 + o(1))(r+1)^{r+1}}{2^{2r-1} r^r r!\ (\lambda - r)^r} \left(\frac{C_1(r+1)}{C_2 r} + \frac{\lambda^r}{\lambda - r} \right) \frac{1}{N^r} \ .$$

Оценим погрешность квадратурной формулы (5.14)

$$|R_N(\varphi)| \leq 2 \left| \sum_{k=1}^{M-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau) - \tilde{\varphi}(\tau, [t_k, t_{k+1}])}{\tau} d\tau \right| +$$

$$+\left|\int\limits_{t_{-1}}^{t_1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau-\sum_{k=1}^{r-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!\ k}M^{-k(r+1)/r}(1-(-1)^k)\right|+$$

$$+2\left|\sum_{k=M_0}^{M_1-1}\int\limits_{v_{k+1}}^{v_k}\frac{\varphi(\tau)-\tilde{\varphi}(\tau,[v_{k+1},v_k])}{\tau^{\lambda+1}}d\tau\right|+$$

$$+2\left|\frac{1}{r!}\int\limits_{A}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)-T_r(\varphi,[A,\infty),A)}{\tau^{\lambda+1}}d\tau\right|=$$

$$=r_1+r_2+r_3+r_4\ .$$

В разд. 1 были получены оценки

$$r_1\le(1+o(1))\frac{(r+1)^{r+1}}{2^{2r-1}r^{r+1}r!\ M^r}, \tag{5.19}$$

$$r_2=\left|\int\limits_{t_{-1}}^{t_1}\frac{1}{\tau}\left(f(\tau)-\sum_{k=0}^{r-1}\frac{f^{(k)}(0)\tau^k}{k!}\right)d\tau\right|=o(M^{-r}), \tag{5.20}$$

$$r_3\le 2\left|\sum_{k=M_0}^{M_1}\int\limits_{v_{k+1}}^{v_k}\frac{\varphi(\tau)-\tilde{\varphi}(\tau,[v_{k+1},v_k])}{\tau^{\lambda+1}}d\tau\right|=$$

$$=2\left|\sum_{k=M_0}^{M_1}\int\limits_{v_{k+1}}^{v_k}\frac{1}{\tau^{\lambda+1}}\left[\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{v_{k+1}}^{v_k}K_r(\tau-v)\varphi^{(r)}(v)dv-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{l=0}^{r-1}\frac{B_{kl}}{(r-l-1)!}\int\limits_{v_{k+1}}^{v_k}K_{r-l}(v_k-v)\varphi^{(r)}(v)dv\right]d\tau\right|\le$$

$$\le\frac{2}{r!}\sum_{k=M_0}^{M_1}\frac{1}{v_{k+1}^{\lambda+1}}\int\limits_{v_{k+1}}^{v_k}\left|(v_k-v)^r-\sum_{l=0}^{r-1}\frac{r!B_{kl}(v_k-v_{k+1})(v_k-v)^{r-l-1}}{(r-l-1)!}\right|dv.$$

Тогда

$$r_3\le\frac{2}{r!}\sum_{k=M_0}^{M_1}\frac{1}{v_{k+1}^{\lambda+1}}\frac{2((v_k-v_{k+1})/2)^{r+1}R_{r1}(1)}{r+1}=$$

$$= \frac{2}{r!4^r} \sum_{k=M_0}^{M_1} \frac{(v_k - v_{k+1})^{r+1}}{v_{k+1}^{\lambda+1}} =$$

$$= \frac{2(A^{(\lambda-r)/(r+1)} - 1)^{r+1}}{r!4^r n^r A^{\lambda-r}} \left(\frac{r+1}{\lambda - r}\right)^{r+1} =$$

$$= \frac{(A^{(\lambda-r)/(r+1)} - 1)(A^{(\lambda-r)/(r+1)}\lambda - r)^r (r+1)^{r+1}}{2^{2r-1} r!\ A^{\lambda-r} r^r (\lambda - r)^{r+1} N^r}. \tag{5.21}$$

В качестве функции $\varphi(t) \in W_\rho^r(1)$, доставляющей максимум интегралу

$$\int\limits_A^\infty \frac{\varphi(\tau) - T_r(\varphi, [0,\infty), A)}{\tau^{1+\lambda}} d\tau,$$

естественно взять $\varphi(\tau) = \frac{1}{r!}(\tau - A)^r$. В результате имеем

$$r_4 = \frac{2}{r!} \int\limits_A^\infty \frac{(\tau - A)^r}{\tau^{\lambda+1}} d\tau = \frac{2D(r,\lambda)}{r!(\lambda - r)A^{\lambda-r}}. \tag{5.22}$$

Из оценок (5.19) — (5.22) мы получаем

$$R_N[\Psi] \le (1 + o(1)) \frac{(r+1)^{r+1}}{2^{2r-1} r^r r!(\lambda - r)^r} \left(\frac{C_1(r+1)}{C_2 r} + \frac{\lambda^r}{\lambda - r}\right) \frac{1}{N^r}.$$

Сопоставляя эту оценку с оценкой снизу, убеждаемся в справедливости теоремы.

ГЛАВА 3

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ С ЯДРАМИ КОШИ И ГИЛЬБЕРТА

1. Класс W^rH_α

1.1. Асимптотически оптимальные пассивные алгоритмы на классе $H_\alpha(1)$

Рассмотрим сингулярный интеграл с ядром Гильберта вида

$$F\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma,$$

который будем вычислять по к.ф. вида

$$F\varphi = \sum_{k=1}^{N}\varphi(s_k)p_k(s) + R_N(s, s_k, p_k(s), \varphi) \tag{1.1}$$

с узлами $0 \le s_k \le 2\pi$ и весами $p_k(s)$, $k = 1, 2, \cdots, N$, и сингулярный интеграл с ядром Коши вида

$$T\varphi = \int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} \quad (t \in (-1, 1)),$$

который будем вычислять по к.ф. вида

$$T\varphi = \sum_{k=-N}^{N}\varphi(t_k)p_k(t) + R_N(t, t_k, p_k(t), \varphi), \tag{1.2}$$

где $-1 \le t_{-N} < \cdots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \cdots < t_N \le 1$.

1.1.1. Формулировки теорем

Теорема 1.1 [29], [36]. Пусть $\Psi = H_\alpha(1)$ $(0 < \alpha \le 1)$. Тогда среди всевозможных к.ф. вида (1.1) асимптотически оптимальной является формула

$$F\varphi = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}{}'\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\varphi(t'_{k-1})ctg\frac{\sigma-s}{2}d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{t_{v-2}}^{t_{v+1}}\varphi(t'_{v-1})ctg\frac{\sigma-s}{2}d\sigma +$$

$$+R_N(s,\varphi), \tag{1.3}$$

где $t_k = 2k\pi/N$, $t'_k = (2k+1)\pi/N$, $k = 0, 1, \cdots, N$, $\sum'$ означает, что суммирование ведется по всем $k \neq v, v \pm 1$, $s \in [t_{v-1}, t_v)$. Погрешность к.ф. (1.3) равна $R_N[\Psi] = 2\ln N/\pi^{1-\alpha}(1+\alpha)N^\alpha + O(N^{-\alpha})$.

Теорема 1.2 [29], [36]. Пусть $\Psi = H_\omega$, где $\omega(\sigma) \in \Phi$. Тогда среди всевозможных к.ф., использующих N значений подынтегральной функции, асимптотически оптимальной является формула (1.3). Погрешность этой формулы равна

$$R_N[\Psi] = \frac{2N(\ln N + o(1))}{\pi^2} \int\limits_0^{\pi/N} \omega(\sigma)d\sigma.$$

Теорема 1.3 [29], [36]. Пусть $\Psi = H_\alpha(1)$ $(0 < \alpha \leq 1)$. Тогда среди всевозможных к.ф. вида (1.2) формула

$$T\varphi = \varphi(t_0)\int\limits_{-1}^{t_0} \frac{d\tau}{\tau - t} + \varphi(t_{2N})\int\limits_{t_{2N}}^{1} \frac{d\tau}{\tau - t} + \varphi(t'_j)\int\limits_{t_j-1}^{t_j+2} \frac{d\tau}{\tau - t} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{2N-1}{}'\varphi(t'_k)\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\tau}{\tau - t} + R_N(\varphi), \tag{1.4}$$

где $t_k = -1 + (2k+1)/(2N+1)$, $t'_k = t_k + 1/(2N+1)$, $k = 0, 1, \cdots, 2N$, $t \in [t_j, t_{j+1})$, $j = 1, 2, \cdots, 2N-1$, $\sum'$ означает суммирование по $k \neq j-1, j, j+1$, является асимптотически оптимальной при $-1+3/(2N+1) \leq t \leq 1-3/(2N+1)$. В этом случае погрешность $R_N[\Psi]$ равна $R_N[\Psi] = (1+o(1))2^{1-\alpha}\ln N/(1+\alpha)N^\alpha$.

Замечание. Теорема справедлива и при четном числе узлов.

Теорема 1.4 [29], [36]. Пусть $\Psi = H_\omega$, где $\omega \in \Phi$ и, кроме того, является выпуклой вверх функцией на сегменте $[-1, 1]$. Тогда среди всевозможных к.ф. вида (1.2) формула

$$T\varphi = \varphi(t_0)\int\limits_{-1}^{t_0} \frac{d\tau}{\tau - t} + \varphi(t_{2N})\int\limits_{t_{2N}}^{1} \frac{d\tau}{\tau - t} + \sum_{k=0}^{2N-1}{}'\varphi(t'_k)\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\tau}{\tau - t} +$$

$$+\varphi(t'_{j-1})\int\limits_{t_{j-1}}^{t-d} \frac{d\tau}{\tau - t} + \varphi(t'_{j+1})\int\limits_{t+d}^{t_{j+2}} \frac{d\tau}{\tau - t} + R_N(\varphi), \tag{1.5}$$

где $t_k = -1 + (2k+1)/(2N+1)$, $t'_k = t_k + 1/(2N+1)$, $k = 0, 1, \cdots, 2N$, $t \in [t_j, t_{j+1})$, $j = 1, 2, \cdots, 2N-1$, $d = 1/(2N+1)$, $\sum'$ означает суммирование по $k \neq j-1, j, j+1$, является асимптотически оптимальной при $-1 + 3/(2N+1) \leq t \leq 1 - 3/(2N+1)$. Ее погрешность равна $R_N[\Psi] = (1+o(1))2(2N+1)\ln N \int\limits_0^{1/(2N+1)} \omega(t)dt$.

Замечание. Теорема справедлива и при четном числе узлов.

Построим асимптотически оптимальные квадратурные формулы вычисления интегралов $T\varphi$ при $-1 < t < 1$. Рассмотрим сингулярный интеграл $T\varphi$ на классе функций H_α, $0 < \alpha \leq 1$. Разобьем сегмент $[-1, 1]$ на $2N$ частей точками $t_k = -1 + k/N$, $k = 0, 1, \ldots, 2N$ и обозначим через Δ_k сегменты $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, 2N$. Введем квадратурную формулу

$$T\varphi = R_N(\varphi) +$$

$$+ \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{2N-1}{}' \varphi(t'_k) \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\tau}{\tau - t} + \varphi(t'_j) \int\limits_{t_{j-1}}^{t_{j+2}} \frac{d\tau}{\tau - t} \text{ при } t_1 < t < t_{2N-1}; \\ \varphi(t_0) \int\limits_{t_0}^{t_2} \frac{d\tau}{\tau - t} + \sum\limits_{k=2}^{2N-1} \varphi(t'_k) \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\tau}{\tau - t} \text{ при } t_0 < t \leq t_1; \\ \sum\limits_{k=0}^{2N-3} \varphi(t'_k) \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\tau}{\tau - t} + \varphi(t_{2N}) \int\limits_{t_{2N-2}}^{t_{2N}} \frac{d\tau}{\tau - t} \text{ при } t_{2N-1} \leq t < t_{2N}, \end{cases} \tag{1.6}$$

где $t \in [t_j, t_{j+1})$. Знак $\sum'$ означает суммирование по $k \neq j-1$, j, $j+1$, $t'_k = (t_k + t_{k+1})/2$.

Теорема 1.5 [36]. Пусть $\Psi = H_\alpha(1)$, $(0 < \alpha \leq 1)$, $-1 < t < 1$. Тогда среди всевозможных к.ф. вида (1.2) формула (1.6) является асимптотически оптимальной. Погрешность $R_N[\Psi]$ равна

$$R_N[\Psi] = (1+o(1))2^{1-\alpha} \ln N/(1+\alpha)N^\alpha. \tag{1.7}$$

Теорема 1.6 [36]. Пусть $\Psi = H_w$, $(w \in \Phi)$. Тогда среди всевозможных к.ф. вида (1.2) формула (1.6) является асимптотически оптимальной. Ее погрешность равна

$$R_N[\Psi] = (1+o(1))2(2N+1) \int\limits_0^{1/(2N+1)} w(t)dt \ln N.$$

Теорема 1.7 [29]. Пусть $\Psi = H_\alpha(1),\ 0 < \alpha < 1$. Тогда среди всевозможных к.ф. вида (1.1) асимптотически оптимальной является формула

$$F\varphi = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\varphi(t'_{k-1})\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma - t'_j}{2}d\sigma + R_N(\varphi), \tag{1.8}$$

где $t_k = 2k\pi/N,\ t'_k = (2k+1)\pi/N,\ k = 0, 1, \ldots, N,\ s \in [t_j, t_{j+1})$. Погрешность этой формулы равна $R_N[\Psi] = 2\ln N/\pi^{1-\alpha}(1+\alpha)N^\alpha + o(N^{-\alpha})$.

Теорема 1.8. Пусть $\Psi = H_\alpha(1),\ 0 < \alpha < 1$. Среди всевозможных к.ф. вида (1.2) асимптотически оптимальной является формула

$$T\varphi = \sum_{k=0}^{N-1}\varphi(t'_k)\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{d\tau}{\tau - t'_j} + R_N(\varphi),$$

где $t_k = -1 + 2k/N,\ t'_k = (t_k + t_{k+1})/2,\ t \in [-1+\sigma, 1-\sigma]$, $t \in [t_j, t_{j+1})$, $\sigma = \mathrm{const} > 0$. Погрешность этой формулы равна

$$R_N(\Psi) = \frac{(1+o(1))2\ln N}{(1+\alpha)N^\alpha}.$$

1.1.2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1.1. Вначале найдем оценку снизу верхней грани погрешности к.ф. типа (1.1) на классе функций $H_\alpha(1)$ и на произвольном векторе (S, P) узлов и весов. Пусть вектор узлов имеет вид $S = (s_1, \cdots, s_N)$. Отметим, что сегмент $[0, 2\pi]$ считаем закольцованным, т.е. точки 0 и 2π отождествляются.

Введем обозначение $x_k = (s_{k+1} - s_k)/2$ $(k = 1, 2, \ldots, N-1, \quad x_N = (2\pi + s_1 - s_N)/2$. Возможны два случая: 1) хотя бы одно из значений x_v $(v = 1, 2, \cdots, N)$ не меньше $2\pi N^{-1}(\ln N)^{1/\alpha}$; 2) каждое из этих значений в отдельности меньше $2\pi N^{-1}(\ln N)^{1/\alpha}$.

В первом случае, полагая без ограничения общности, что $2\pi N^{-1}(\ln N)^{1/\alpha} \le x_1 \le \pi/2$, имеем

$$\max_{0\le s\le 2\pi}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_1^*(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma - \mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma \ge \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_1^*(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma - \mathrm{s}_1}{2}\mathrm{d}\sigma \ge$$

$$\geq \pi^{\alpha-1}N^{-\alpha}\ln N\left(\frac{2^\alpha}{\alpha}+2^\alpha\ln 2\right)\geq 2\pi^{\alpha-1}\frac{\ln N}{(1+\alpha)N^\alpha},$$

где

$$\varphi_1^*(\sigma)=\begin{cases}\min((\sigma-s_1)^\alpha,(s_2-\sigma)^\alpha), & \mathrm{s_1}\leq\sigma\leq\mathrm{s_2},\\ 0 & .\end{cases}$$

Перейдем ко второму случаю. Разобъем сегмент $[0,2\pi]$ на $M=[(2N^{-1}(\ln N)^{1/\alpha})^{-1}]+1$ $([\alpha]-\alpha)$ равных частей точками $v_k=2k\pi/M$. Тогда в каждом сегменте $[v_k,v_{k+1}]$ имеется, по крайней мере, по одному узлу к.ф. (1.1). Выберем в каждом сегменте $[v_k,v_{k+1}]$ точно по одному узлу, который обозначим через s_k^* $(k=1,2,\cdots,M)$.

Каждому узлу s_j^* поставим в соответствие функцию

$$\varphi_j^*(\sigma)=\begin{cases}0 & \sigma\in[\mathrm{v_{j-1}},\mathrm{v_{j+1}}]\cup[\mathrm{v_{j^*-1}},\mathrm{v_{j^*+1}}],\\ & \min_k(|\sigma-s_k|^\alpha\mathrm{sgnctg}\frac{\sigma-\mathrm{s_j^*}}{2}\\ & \sigma\end{cases}$$

при $\alpha=1$ и

$$\varphi_j^*(\sigma)=\begin{cases}0 & \sigma\in[\mathrm{v_{j-q}},\mathrm{v_{j+q}}]\cup[\mathrm{v_{j^*-q}},\mathrm{v_{j^*+q}}],\\ & \min\limits_k|\sigma-s_k|^\alpha\mathrm{sgnctg}\frac{\sigma-\mathrm{s_j^*}}{2}\\ & \sigma,\end{cases}$$

при $0<\alpha<1$.

Здесь $q=[2^{1/\alpha-2}]+1$, $[v_{j^*},v_{j^*+1}]$ – сегмент, в который попадает точка $s_j^*+\pi$.

Зафиксируем произвольное значение $1\leq j\leq M$ и оценим интеграл

$$(F\varphi_j^*)(s_j^*)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_j^*(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s_j^*}}{2}\mathrm{d}\sigma\geq$$

$$\geq\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{[M/2]-1}\left(\int\limits_{s_j^*+2k\pi/M}^{s_j^*+2(k+1)\pi/M}\varphi_j^*(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s_j^*}}{2}\mathrm{d}\sigma+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{s_j^*-2(k+1)\pi/M}^{s_j^*-2k\pi/M}\varphi_j^*(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s_j^*}}{2}\mathrm{d}\sigma\right)\geq$$

$$\geq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{[M/2]-1}\frac{M}{(k+1)\pi}\left(\int\limits_{v_{j+k}}^{v_{j+k+1}}|\varphi_j^*(\sigma)|d\sigma+\int\limits_{v_{j-k-1}}^{v_{j-k}}|\varphi_j^*(\sigma)|d\sigma\right).$$

Усреднив значения $(F\varphi_j^*)(s_j^*)$, имеем

$$\max_{(s,j)}(F\varphi_j^*)(s)\geq$$

$$\geq \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\frac{M}{2\pi^2}\sum_{k=0}^{[M/2]-1}\frac{1}{k+1}\left(\int\limits_{v_{j+k}}^{v_{j+k+1}}|\varphi_j^*(\sigma)|d\sigma+\int\limits_{v_{j-k-1}}^{v_{j-k}}|\varphi_j^*(\sigma)|d\sigma\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=0}^{[M/2]-1}\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{M}\left(\int\limits_{v_{j+k+1}}^{v_{j+k}}|\varphi_j^*(\sigma)|d\sigma+\int\limits_{v_{j-k-1}}^{v_{j-k}}|\varphi_j^*(\sigma)|d\sigma\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\varphi^*(\sigma)d\sigma\sum_{k=0}^{[M/2]-1}\frac{1}{(k+1)}=(1+o(1))\frac{\ln N}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\varphi^*(\sigma)d\sigma.$$

Здесь $\varphi^*(\sigma)=\min\limits_k|\sigma-s_k|^\alpha$. Таким образом, задача свелась к нахождению нижней грани значений $\int\limits_0^{2\pi}\varphi^*(\sigma)d\sigma$ при варьировании узлами s_k $(k=1,2,\cdots,N)$. Вычислим этот интеграл при произвольном векторе узлов

$$\int\limits_0^{2\pi}\varphi^*(\sigma)d\sigma=\frac{2}{1+\alpha}\sum_{k=0}^{N}x_k^{1+\alpha},$$

полагая $x_0=s_1$, $x_k=(s_{k+1}-s_k)/2$, $k=1,2,\ldots,N-1$, $x_N=2\pi-s_N$. Найдем минимум функции

$$\phi(x_0,\cdots,x_N)=\frac{2}{1+\alpha}\sum_{k=0}^{N}x_k^{1+\alpha}$$

при ограничении $\sum\limits_{k=0}^{N}x_k=2\pi$.

Воспользовавшись стандартными приемами теории функций многих переменных, можно показать, что $\phi(x_0,\cdots,x_N)\geq 2\pi^{1+\alpha}/(1+$

$+\alpha)N^\alpha$. Следовательно, $\max_{(s,j)}(F\varphi_j^*)(s) \geq 2\pi^{\alpha-1}\ln N/(1+\alpha)N^\alpha$. Оценка снизу получена.

Опишем еще один метод получения оценок снизу, которым будем неоднократно пользоваться ниже. Пусть $L = [\ln N]$, $M = [N/L]$. Введем узлы $v_k = 2k\pi/M$, $k = 0, 1, \ldots, M$. Обозначим через $\{\zeta_k\}$ множество узлов, объединяющее множество узлов $\{v_k\}$, $k = 0, 1, \ldots, M$, и множество узлов $\{s_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, квадратурной формулы (1.1). Для определенности будем считать, что узлы $\{v_k\}$ и $\{s_k\}$ не пересекаются. Тогда множество $\{\zeta_k\}$ состоит из $N_1 = N + M$ узлов. Введем функцию $\varphi^*(s)$ формулой $\varphi^*(s) = \min\limits_k |s - \zeta_k|^\alpha$. При этом сегмент $[0, 2\pi]$ считаем закольцованным, т.е. точки 0 и 2π отождествляем. Поставим каждому узлу v_j $j = 0, 1, \ldots, M-1$ в соответствие функцию

$$\varphi_j(s) = \begin{cases} \varphi^*(s)\mathrm{sgnctg}\frac{\mathrm{s}-\mathrm{v_j}}{2}, \ \mathrm{s} \notin [\mathrm{v}_{\bar{\mathrm{j}}}, \mathrm{v}_{\bar{\mathrm{j}}+1}], \\ 0, \ \mathrm{s} \in [\mathrm{v}_{\bar{\mathrm{j}}}, \mathrm{v}_{\bar{\mathrm{j}}+1}] \end{cases}$$

при $\alpha = 1$ и функцию

$$\varphi_j(s) = \begin{cases} \varphi^*(s)\mathrm{sgnctg}\frac{\mathrm{s}-\mathrm{v_j}}{2}, \ \mathrm{s} \notin [\mathrm{v_{j-q}}, \mathrm{v_{j+q}}] \cup [\mathrm{v}_{\bar{\mathrm{j}}-\mathrm{q}}, \mathrm{v}_{\bar{\mathrm{j}}+\mathrm{q}}], \\ 0, \ \mathrm{s} \in [\mathrm{v_{j-q}}, \mathrm{v_{j+q}}] \cup [\mathrm{v}_{\bar{\mathrm{j}}-\mathrm{q}}, \mathrm{v}_{\bar{\mathrm{j}}+\mathrm{q}}] \end{cases}$$

при $0 < \alpha < 1$.

Здесь через $[v_{\bar{j}}, v_{\bar{j}+1}]$ обозначен сегмент, в который попадает точка $v_j + \pi$, $q = [2^{1/\alpha-2}] + 1$.

Зафиксируем произвольный узел v_j, $j = 0, 1, \ldots, M-1$ и оценим снизу интеграл

$$(F\varphi_j)(v_j) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi_j(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma - \mathrm{v_j}}{2}\mathrm{d}\sigma \geq$$

$$\geq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=q}^{[(M-1)/2]-1} |\mathrm{ctg}\frac{\mathrm{v_{k+1}}}{2}| \int\limits_{\mathrm{v_{j+k}}}^{\mathrm{v_{j+k+1}}} \varphi^*(\sigma)\mathrm{d}\sigma +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=q}^{[(M-1)/2]+1} |\mathrm{ctg}\frac{\mathrm{v_{k+1}}}{2}| \int\limits_{\mathrm{v_{j-k-1}}}^{\mathrm{v_{j-k}}} \varphi^*(\sigma)\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \frac{1+o(1)}{2\pi}\sum_{k=q}^{[(M-1)/2]-1} \frac{M}{\pi k}\int\limits_{v_{j+k}}^{v_{j+k+1}} \varphi^*(\sigma)d\sigma +$$

$$+\frac{1+o(1)}{2\pi}\sum_{k=q}^{[(M-1)/2]-1}\frac{M}{\pi k}\int\limits_{v_{j-k-1}}^{v_{j-k}}\varphi^*(\sigma)d\sigma.$$

Осредним предыдущее неравенство по параметру j, $0\le j\le M-1$. В результате имеем

$$\sup_{\varphi\in H_\alpha(1)}\max_t(F\varphi)(t)\ge\frac{1}{M}\sum_{l=0}^{M-1}F\varphi_l(v_l)\ge$$

$$\ge\frac{1+o(1)}{2\pi}\sum_{l=0}^{M-1}\left[\frac{M}{2\pi^2}\sum_{k=q}^{[(M-1)/2]-1}\frac{1}{k}\int\limits_{v_{l+k}}^{v_{l+k+1}}\varphi^*(\sigma)d\sigma+\right.$$

$$\left.+\frac{M}{2\pi^2}\sum_{k=q}^{[(M-1)/2]-1}\frac{1}{k}\int\limits_{v_{l-k-1}}^{v_{l-k}}\varphi^*(\sigma)d\sigma\right]=$$

$$=\frac{1+o(1)}{\pi^2}\sum_{k=q}^{[(M-1)/2]-1}\frac{1}{k}\int\limits_0^{2\pi}\varphi^*(\sigma)d\sigma=\frac{1+o(1)}{\pi^2}\ln\frac{M-1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\varphi^*(\sigma)d\sigma=$$

$$=\frac{1+o(1)}{\pi^2}\ln N\int\limits_0^{2\pi}\varphi^*(\sigma)d\sigma.$$

Погрешность к.ф. (1.3) исследована в статье В.В. Иванова [82]. Повторим проделанные там выкладки. Модуль $|R_N(\varphi)|$ представим в виде

$$|R_N(\varphi)|\le\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}{}'\left|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(\varphi(\sigma)-\varphi(t'_{k-1}))\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma\right|+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{t_{v-2}}^{t_{v+1}}(\varphi(\sigma)-\varphi(t'_{v-1}))\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma\right|=I_1+I_2.$$

Не ограничивая общности, можно положить $s=0$. Тогда

$$I_1\le\frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{[N/2]+1}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}|\varphi(\sigma)-\varphi(t'_{k-1})|\mathrm{ctg}\frac{\sigma}{2}\mathrm{d}\sigma|\le\frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{N}}{1+\alpha}\left(\frac{\pi}{\mathrm{N}}\right)^{1+\alpha}\sum_{\mathrm{k=2}}^{[\mathrm{N}/2]+1}\frac{1}{\pi\mathrm{k}}=$$

$$= \frac{2\ln N}{\pi^{1-\alpha}(1+\alpha)N^{\alpha}} + O(N^{-\alpha});$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{t_{-2}}^{t_1}(\varphi(\sigma)-\varphi(0)+\varphi(0)-\varphi(t'_{-1}))\mathrm{ctg}\frac{\sigma}{2}\mathrm{d}\sigma\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{t_{-2}}^{t_1}(\varphi(\sigma)-\varphi(0))\mathrm{ctg}\frac{\sigma}{2}\mathrm{d}\sigma\right| +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{t_{-2}}^{t_{-1}}(\varphi(0)-\varphi(t'_{-1}))\mathrm{ctg}\frac{\sigma}{2}\mathrm{d}\sigma\right| \leq \left(\frac{2^{1+2\alpha}}{\alpha}+\ln 2\right)\frac{1}{\pi^{1-\alpha}N^{\alpha}}.$$

Из оценок I_1 и I_2 следует вторая часть теоремы. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.2. В определении 2.5 главы 1 приведены основные свойства класса Φ, из которых ниже понадобятся следующие: 1) если $\varphi(t) \in \Phi$, то $\varphi(t)/t$ почти всегда убывает; 2) если $\varphi(t) \in \Phi$, то существуют $0 < \alpha, \beta < 1$, такие, что $\varphi(t)/t^{\alpha}$ почти всегда возростает, а $\varphi(t)/t^{\beta}$ почти всегда убывает; 3) если $\varphi(t) \in \Phi$, то и $(t/\varphi(t)) \in \Phi$.

Вначале найдем оценку снизу верхней грани погрешности к.ф. (1.1) на произвольном векторе (S, P) узлов и весов. Возможны два случая: 1) хотя бы при одном значении k

$$x_k = |s_{k+1} - s_k|/2 \geq h = (2C_{\alpha}\alpha\ln N)^{1/\alpha}\pi N^{-1};$$

2) при всех значениях k $|s_{k+1} - s_k| < h$. Правила выбора констант C_{α} и α будут указаны ниже.

В первом случае, полагая без ограничения общности, что $x_1 > h$, имеем

$$\max_{0\leq s\leq 2\pi}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi^*(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma \geq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\mathrm{x}_1}\omega(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma}{2}\mathrm{d}\sigma \sim \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\mathrm{x}_1}\frac{\omega(\sigma)}{\sigma}\mathrm{d}\sigma,$$

где $\varphi^*(\sigma) = \omega(\min\limits_{k=1,2}|\sigma - s_k|)$ $\mathrm{s}_1 \leq \sigma \leq \mathrm{s}_2, 0 \quad \sigma$.

Так как функция $\omega \in \Phi$, то по второму свойству функций из класса Φ, существуют такие константы α и C_{α}, что при $\sigma_1 \leq \sigma_2$

$\omega(\sigma_1)\ \sigma_1^{-\alpha} \le C_\alpha \omega(\sigma_2)\sigma_2^{-\alpha}$. Следовательно,

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{x_1} \omega(\sigma)\sigma^{-1}d\sigma \ge \frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi/N}^{x_1} \omega(\sigma)\sigma^{-1}d\sigma \ge \frac{1}{\pi C_\alpha}\frac{\omega(\pi/N)}{(\pi/N)^\alpha}\int\limits_{\pi/N}^{x_1} \sigma^{\alpha-1}d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\pi C_\alpha}\frac{\omega(\pi/N)x_1^\alpha}{(\pi/N)^\alpha\alpha} - \frac{1}{\pi C_\alpha \alpha}\omega(\pi/N) =$$

$$= \frac{(\pi/N)\omega(\pi/N)N^{1+\alpha}x_1^\alpha}{C_\alpha \pi^{(2+\alpha)}\alpha} - \frac{N}{\pi^2 C_\alpha \alpha}\left(\frac{\pi}{N}\omega(\pi/N)\right) \ge$$

$$\ge \frac{1}{\pi^{2+\alpha}C_\alpha}\int\limits_0^{\pi/N} \omega(\sigma)d\sigma N^{1+\alpha}\frac{x_1^\alpha}{\alpha} - \frac{2N}{\pi^2 C_\alpha \alpha}\int\limits_0^{\pi/N} \omega(\sigma)d\sigma \ge$$

$$\ge \frac{2N\ln N}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/N} \omega(\sigma)d\sigma -$$

$$-\frac{2N}{\pi^2 C_\alpha \alpha}\int\limits_0^{\pi/N} \omega(\sigma)d\sigma \sim \frac{2N\ln N}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/N} \omega(\sigma)d\sigma.$$

Для оценки модуля непрерывности $\omega(\sigma)$ здесь использовано известное (см. [67], стр. 51) неравенство

$$\frac{1}{2}\omega(\sigma) \le \frac{1}{\sigma}\int\limits_0^{\sigma} \omega(t)dt \le \omega(\sigma).$$

Переходя ко второму случаю и повторяя рассуждения, сделанные выше при доказательстве теоремы 1.1, получаем оценку

$$\max_j \max_s (\mathcal{F}\varphi_j^*)(s) \ge (1+o(1))\frac{\ln N}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi} \varphi^*(\sigma)d\sigma,$$

где

$$\varphi_j^*(\sigma) = \begin{cases} 0 & \sigma \in [\mathrm{v_{j-\gamma}}, \mathrm{v_{j+\gamma}}] \cup [\mathrm{v_{j^*-\gamma}}, \mathrm{v_{j^*-\gamma}}], \\ \omega(\min_k |\sigma - s_k|)\mathrm{sgn\ ctg}\frac{\sigma-\mathrm{v_j}}{2} & \sigma, \end{cases}$$

$\varphi^*(\sigma) = \omega(\min_k |\sigma - s_k|)$, $\gamma = [C_\alpha/2]^{1/\alpha} + 1$, значение v_j^* определяется так же, как при доказательстве теоремы 1.1.

Нетрудно видеть, что $\int\limits_0^{2\pi} \varphi^*(\sigma)d\sigma \geq 2N \int\limits_0^{\pi/N} \omega(\sigma)d\sigma$. Поэтому

$$\max_j \max_s (\mathcal{F}\varphi_j^*)(s) \geq (1+o(1))2N\pi^{-2}\ln N \int\limits_0^{\pi/N} \omega(\sigma)d\sigma.$$

Оценка снизу получена.
Перейдем к оценке погрешности к.ф. (1.3)

$$|R_N(\varphi)| \leq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}{}' \left| \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (\varphi(\sigma) - \varphi(t'_{k-1}))\mathrm{ctg}\frac{\sigma - \mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma \right| +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{t_{v-2}}^{s-t_1} |\varphi(\sigma) - \varphi(t'_{v-1})| \left|\mathrm{ctg}\frac{\sigma - \mathrm{s}}{2}\right| d\sigma +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{s+t_1}^{t_{v+1}} |\varphi(\sigma) - \varphi(t'_{v-1})| \left|\mathrm{ctg}\frac{\sigma - \mathrm{s}}{2}\right| d\sigma +$$

$$+\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{s-t_1}^{s+t_1} \varphi(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma - \mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma\right| = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \qquad (1.9)$$

Оценим каждое выражение $I_1 - I_4$ в отдельности:

$$I_1 \leq \frac{2+o(1)}{\pi}\sum_{k=1}^{[N/2]} \frac{N}{\pi k}\int\limits_0^{\pi/N} \omega(\sigma)d\sigma \leq (2+o(1))\frac{N\ln N}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/N} \omega(\sigma)d\sigma; \quad (1.10)$$

$$I_2 \leq \frac{16N(1+o(1))}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/N} \omega(\sigma)d\sigma; \qquad (1.11)$$

$$I_3 \leq \frac{16N(1+o(1))}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/N} \omega(\sigma)d\sigma. \qquad (1.12)$$

Переходя к оценке I_4, заметим, что так как $\omega(\sigma) \in \Phi$, то $\omega(\sigma)/\sigma^\alpha$

функция почти возростающая и, следовательно, для любых двух точек σ_1 и σ_2 таких, что $\sigma_1 \le \sigma_2$ $\omega(\sigma_1) \le C_\alpha \sigma_1^\alpha \omega(\sigma_2)\sigma_2^{-\alpha}$.

Поэтому $\omega(\sigma_1) \le C_\alpha \sigma_1^\alpha \omega(2\pi/N)(2\pi/N)^{-\alpha}$ и

$$I_4 = \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{s-t_1}^{s+t_1} (\varphi(\sigma) - \varphi(s)) \mathrm{ctg} \frac{\sigma - \mathrm{s}}{2} \mathrm{d}\sigma \right| \le \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi/N} \omega(\sigma) \mathrm{ctg} \frac{\sigma}{2} \mathrm{d}\sigma \le$$

$$\le C_\alpha \omega\left(\frac{2\pi}{N}\right)\left(\frac{2\pi}{N}\right)^{-\alpha} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi/N} \sigma^\alpha \mathrm{ctg} \frac{\sigma}{2} \mathrm{d}\sigma \le$$

$$\le (1 + o(1)) 2C_\alpha \omega\left(\frac{2\pi}{N}\right)\left(\frac{2\pi}{N}\right)^{-\alpha} \frac{1}{\pi\alpha}\left(\frac{2\pi}{N}\right)^{\alpha} \le$$

$$\le \frac{1 + o(1))4C_\alpha}{\pi\alpha} \omega\left(\frac{\pi}{N}\right) \le (1 + o(1))\left(\frac{\pi}{N}\right)\omega\left(\frac{\pi}{N}\right)\frac{4C_\alpha N}{\pi^2\alpha} \le$$

$$\le \frac{(1 + o(1))8C_\alpha N}{\pi^2\alpha} \int\limits_0^{\pi/N} \omega(\sigma) d\sigma. \tag{1.13}$$

Из оценок (1.9) – (1.13) следует, что

$$R_N[\Psi] \le \frac{2N \ln N}{\pi^2} \int\limits_0^{\pi/N} \omega(\sigma) d\sigma + o\left(N \int\limits_0^{\pi/N} \omega(\sigma) d\sigma\right).$$

Сопоставляя эту оценку с оценкой снизу, убеждаемся в справедливости теоремы.

Доказательство теоремы 1.3. Остановимся на оценке снизу верхней грани погрешности к.ф. (1.2). При рассмотрении узлов t_k ($k = -N, \cdots, N$) могут встречаться две возможности: 1) найдется такое k, что $t_{k+1} - t_k > 2N^{-1}(\ln N)^{1/\alpha}$; 2) расстояние между любыми двумя соседними узлами меньше, чем $2N^{-1}(\ln N)^{1/\alpha}$.

Исследование первой возможности ничем не отличается от аналогичного исследования, проведенного при доказательстве теоремы 1.1, и поэтому на нем не останавливаемся.

Перейдем ко второй возможности. Пусть $M-$ целое число, такое что

$M = [N/(4(2^{1-\alpha}(1+\alpha)^{-1}\ln N)^{1/\alpha})]$, где $[x]-$ антье x. Разобъем весь сегмент $[-1,1]$ на $2M$ равных частей точками $v_k = k/M$, $k = -M, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, M$. Полученные при разбиении сегменты обозначим $\Delta_k = [v_k, v_{k+1}]$. По построению внутри каждого сегмента Δ_k найдется, по крайней мере, один узел t_j к.ф. (1.2). Выберем в каждом сегменте Δ_k ровно по одному узлу к.ф. (1.2). Выбранные узлы будем обозначать t_k^*, $k = (-M, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, M-1)$.

Введем функцию $\varphi_j^*(\tau)$ по формуле

$$\varphi_j^*(\tau) = (\min_k |\tau - t_k|^\alpha)\mathrm{sgn}(\tau - \mathrm{t_j^*})$$

при $\alpha = 1$;

$$\varphi_j^*(\tau) = \begin{cases} 0, \ \tau \in [\mathrm{t_{j^*-q}}, \mathrm{t_{j^*+q}}] \\ (\min_k |\tau - t_k|^\alpha)\mathrm{sgn}(\tau - \mathrm{t_j^*}), \ \tau \in [-1,1]\backslash[\mathrm{t_{j^*-q}}, \mathrm{t_{j^*+q}}] \end{cases}$$

при $0 < \alpha < 1$. Величина q была определена при доказательстве теоремы 1.1.

Возьмем произвольный узел t_j^* $(j = -M, \cdots, M-1)$ и оценим снизу величину

$$R_N(\varphi_j^*) = \sum_{k=0}^{M-j-1} \int\limits_{v_{k+j}}^{v_{k+j+1}} \frac{\varphi_j^*(\tau)d\tau}{\tau - t_j^*} + \sum_{k=0}^{M+j-1} \int\limits_{v_{j-k-1}}^{v_{j-k}} \frac{\varphi_j^*(\tau)d\tau}{\tau - t_j^*} \geq$$

$$\geq \sum_{k=0}^{M-j-1} \frac{1}{|v_{k+j+1} - t_j^*|} \int\limits_{v_{k+j}}^{v_{k+j+1}} \varphi^*(\tau)d\tau + \sum_{k=0}^{M+j-1} \frac{1}{|t_j^* - v_{j-k-1}|} \int\limits_{v_{j-k-1}}^{v_{j-k}} \varphi^*(\tau)d\tau \geq$$

$$\geq \sum_{k=0}^{M-j-1} \frac{M}{k+1} \int\limits_{v_{k+j}}^{v_{k+j+1}} \varphi^*(\tau)d\tau + \sum_{k=0}^{M+j-1} \frac{M}{k+1} \int\limits_{v_{j-k-1}}^{v_{j-k}} \varphi^*(\tau)d\tau,$$

где $\varphi^*(\tau) = \min_k |\tau - t_k|^\alpha$.

Так как $\max_j R_N(\varphi_j^*)$ не меньше среднего значения $R_N(\varphi_j^*)$, вычисленного по любой выборке значений t_j, то

$$\max_j R_N(\varphi_j^*) \geq \frac{1}{2M} \sum_{j=-M}^{M-1} R_N(\varphi_j^*) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2M}\sum_{j=-M}^{M-1}\left[\sum_{k=0}^{M-j-1}\frac{M}{k+1}\int\limits_{v_{k+j}}^{v_{k+j+1}}\varphi^*(\sigma)d\sigma+\sum_{k=0}^{M+j-1}\frac{M}{k+1}\int\limits_{v_{j-k-1}}^{v_{j-k}}\varphi^*(\sigma)d\sigma\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2M-1}\frac{1}{k+1}\left(\sum_{j=-M+k}^{M-1}\int\limits_{v_j}^{v_{j+1}}\varphi^*(\tau)d\tau+\sum_{j=-M}^{M-k-1}\int\limits_{v_j}^{v_{j+1}}\varphi^*(\tau)d\tau\right). \qquad (1.14)$$

Выражение, стоящее в правой части неравенства (1.14), обозначим через I. Нетрудно видеть, что

$$I\geq\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{M-1}\frac{1}{k+1}\left(\sum_{j=-M}^{M-1}\int\limits_{v_j}^{v_{j+1}}\varphi^*(\tau)d\tau+\sum_{j=-M+k}^{M-k-1}\int\limits_{v_j}^{v_{j+1}}\varphi^*(\tau)d\tau\right).$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{j=-M}^{M-1}\int\limits_{v_j}^{v_{j+1}}\varphi^*(\tau)d\tau=\int\limits_{-1}^{1}\varphi^*(\tau)d\tau.$$

Найдем минимальное значение интеграла $\int\limits_{-1}^{1}\varphi^*(\tau)d\tau$. Обозначим через ∇_{-N-1} длину сегмента $[-1,t_{-N}]$, через ∇_N длину сегмента $[t_N,1]$, а через ∇_k длины сегментов $[t_k,(t_k+t_{k+1})/2]$ и $[(t_k+t_{k+1})/2,t_{k+1}]$, $k=$ $=-N,\cdots,N-1$. Тогда $\nabla_{-N-1}+2(\nabla_{-N}+\cdots+\nabla_{N-1})+\nabla_N=2$, а величина интеграла

$$\int\limits_{-1}^{1}\varphi^*(\tau)d\tau=\frac{1}{1+\alpha}[\nabla_{-N-1}^{1+\alpha}+2(\nabla_{-N}^{1+\alpha}+\cdots+\nabla_{N-1}^{1+\alpha})+\nabla_N^{1+\alpha}].$$

Найдем минимум функции

$$\psi(\nabla)=\frac{1}{1+\alpha}[\nabla_{-N-1}^{1+\alpha}+2(\nabla_{-N}^{1+\alpha}+\cdots+\nabla_{N-1}^{1+\alpha})+\nabla_N^{1+\alpha}]$$

при условии $\nabla_{-N-1}+2(\nabla_{-N}+\cdots+\nabla_{N-1})+\nabla_N=2$. Выразим ∇_{-N-1} из последнего равенства и подставим в функцию $\psi(\nabla)$. Тогда

$$\psi(\nabla)=\frac{1}{1+\alpha}[(2-\nabla_N-2(\nabla_{-N}+\cdots+\nabla_{N-1}))^{1+\alpha}+$$

$$+2(\nabla_{-N}^{1+\alpha}+\cdots+\nabla_{N-1}^{1+\alpha})+\nabla_{N}^{1+\alpha}].$$

Найдем производные $\psi(\nabla)$ по ∇_k. Очевидно,

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nabla_k}=-2(2-\nabla_N-2(\nabla_{-N}+\cdots+\nabla_{N-1}))^{\alpha}+2\nabla_k^{\alpha}\quad(k=-N,\cdots,N-1),$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nabla_N}=-(2-\nabla_N-2(\nabla_{-N}+\cdots+\nabla_{N-1}))^{\alpha}+\nabla_N^{\alpha}.$$

По необходимому условию экстремума приравниваем производные нулю и получаем систему уравнений

$$\nabla_k^{\alpha}=-(2-\nabla_N-2(\nabla_{-N}+\cdots+\nabla_{N-1}))^{\alpha}\quad(k=-N,\cdots,N-1);$$

$$\nabla_N^{\alpha}=-(2-\nabla_N-2(\nabla_{-N}+\cdots+\nabla_{N-1}))^{\alpha}.$$

Из рассмотрения этой системы следует, что $\nabla_{-N-1}=\nabla_{-N}=$ $=\nabla_{-N+1}=\cdots=\nabla_{N-1}=\nabla_N=1/(2N+2)$. Поэтому

$$\int\limits_{-1}^{1}\varphi^*(\tau)d\tau\geq\frac{2}{1+\alpha}\left(\frac{1}{2N+2}\right)^{\alpha}.$$

Теперь рассмотрим

$$\sum_{j=-M+k}^{M-k-1}\int\limits_{v_j}^{v_{j+1}}\varphi^*(\tau)d\tau=\int\limits_{v_{-M+k}}^{v_{M-k}}\varphi^*(\tau)d\tau.$$

По построению функция $\varphi^*(t)$ обращается в нуль в точках t_k. Нетрудно видеть, что чем больше функция имеет нулей в сегменте $[v_{-M+k},v_{M-k}]$, тем меньше интеграл $\int\limits_{v_{-M+k}}^{v_{M-k}}\varphi^*(\tau)d\tau$. В сегменте $[v_{-M+k},v_{M-k}]$ не может содержаться более $2(N-k)$ нулей. Будем считать, что в этом сегменте содержится точно $2(N-k)+2$ нуля, относя к множеству нулей и концы сегмента. Найдем при этом предположении минимальное значение интеграла

$$\int\limits_{v_{-M+k}}^{v_{M-k}}\varphi^*(\tau)d\tau.$$

Очевидно,

$$\int\limits_{v_{-M+k}}^{v_{M-k}} \varphi^*(\tau)d\tau = \frac{2}{1+\alpha} \sum_{j=-M+k}^{-M-k+2N+1} \nabla_j^{1+\alpha}.$$

Повторяя проделанные ранее выкладки, убеждаемся в том, что минимум этого интеграла достигается при

$$\nabla_{-M+k} = \nabla_{-M+k+1} = \cdots = \nabla_{-M+2N-k+1} = \frac{M-k}{2M(N-k+\frac{1}{2})}.$$

Тогда

$$\int\limits_{v_{-M+k}}^{v_{M-k}} \varphi^*(\tau)d\tau = \frac{2}{1+\alpha} 2(N-k\frac{1}{2}) \left(\frac{M-k}{2M(N-k+\frac{1}{2})}\right)^{1+\alpha}.$$

Следовательно,

$$I \geq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{k+1} \left[\frac{2^{1-\alpha}}{(1+\alpha)(N+1)^\alpha} + \right.$$

$$\left. + \frac{4(N-k)}{1+\alpha} \left(\frac{M-k}{2M(N-k+1)}\right)^{1+\alpha}\right].$$

Оценим вначале первую сумму

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{k+1} \frac{2^{1-\alpha}}{(1+\alpha)} \left(\frac{1}{(N+1)}\right)^\alpha \geq \frac{1+o(1)}{(1+\alpha)} \left(\frac{1}{(2N+2)}\right)^\alpha \ln N.$$

Перейдем ко второй сумме

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{k+1} \frac{4(N-k)}{1+\alpha} \left(\frac{M-k}{2M(N-k+1)}\right)^{1+\alpha} \geq$$

$$\geq \frac{2}{1+\alpha} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{k+1} (N-k) \left(\frac{M-k}{2M(N-k+1)}\right)^{1+\alpha}.$$

Покажем, что

$$\frac{2}{1+\alpha} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{(N-k)}{k+1} \left(\frac{M-k}{2M(N-k+1)}\right)^{1+\alpha} \geq \frac{1}{1+\alpha} \left(\frac{1+o(1)}{2N+1}\right)^\alpha \ln N.$$

Зафиксируем произвольное достаточно большое число (скажем $L = O(\ln N)$), такое, что $(M-1)/L$ – целое число. Тогда

$$\frac{2}{1+\alpha}\sum_{k=0}^{M-1}\frac{N-k}{k+1}\left(\frac{M-k}{2M(N-k+1)}\right)^{1+\alpha} \geq$$

$$\geq \frac{2}{1+\alpha}\sum_{k=0}^{(M-1)/L}\frac{N-k}{k+1}\left(\frac{M-k}{2M(N-k+1)}\right)^{1+\alpha} \geq$$

$$\geq \frac{2+o(1)}{1+\alpha}\sum_{k=0}^{(M-1)/L}\frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{N-k+1}\right)^{\alpha}\left(\frac{L-1}{2L}\right)^{1+\alpha} \geq$$

$$\geq \left(\frac{L-1}{2L}\right)^{1+\alpha}\frac{1+o(1)}{1+\alpha}\frac{1}{(2N+1)^{\alpha}}\ln N$$

при N стремящемся к бесконечности. Так как $L = [\ln N]$ – целое число, стремящееся к бесконечности, то последняя величина как угодно мало отличается от $\ln N/(1+\alpha)(2N+1)^{\alpha}$. Таким образом, окончательно

$$I \geq 2(1+o(1))\ln N/(1+\alpha)(2N+1)^{\alpha}. \tag{1.15}$$

Из оценок (1.14) – (1.15) следует, что верхняя грань оценки снизу не меньше величины $2\ln N/(1+\alpha)(2N+1)^{\alpha} + o(N^{-\alpha}\ln N)$. Оценка снизу получена.

Погрешность к.ф. (1.4) может быть представлена в виде

$$|R_N(\varphi)| \leq \left|\int_{-1}^{t_0}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_0)}{\tau-t}d\tau\right| + \left|\int_{t_{2N}}^{1}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_{2N})}{\tau-t}d\tau\right| +$$

$$+\sum_{k=0}^{2N-1}{}' \left|\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t'_k)}{\tau-t}d\tau\right| + \left|\int_{t_{j-1}}^{t_{j+2}}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t'_j)}{\tau-t}d\tau\right|. \tag{1.16}$$

Оценим каждое слагаемое в правой части (1.16) в отдельности

$$\left|\int_{-1}^{t_0}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_0)}{\tau-t}d\tau\right| \leq \int_{-1}^{t_0}\frac{|\varphi(\tau)-\varphi(t_0)|}{|\tau-t|}d\tau \leq \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2N+1}\right)^{\alpha}. \tag{1.17}$$

Аналогичным образом оценивается и второе слагаемое

$$\left|\int\limits_{t_{2N}}^{1}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_{2N})}{\tau-t}d\tau\right|\le\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2N+1}\right)^{\alpha}. \tag{1.18}$$

Так как $\varphi(t)\in H_\alpha(1)$, то

$$\sum_{k=0}^{2N-1}{}'\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{|\varphi(\tau)-\varphi(t'_k)|}{|\tau-t|}d\tau=\sum_{k=0}^{j-2}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{|\varphi(\tau)-\varphi(t'_k)|}{|\tau-t|}d\tau+$$

$$+\sum_{k=j+2}^{2N-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{|\varphi(\tau)-\varphi(t'_k)|}{|\tau-t|}d\tau\le\sum_{k=0}^{j-2}\frac{1}{|t_{k+1}-t_j|}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}|\varphi(\tau)-\varphi(t'_k)|d\tau+$$

$$+\sum_{k=j+2}^{2N-1}\frac{1}{|t_k-t_{j+1}|}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}|\varphi(\tau)-\varphi(t'_k)|d\tau\le$$

$$\le\frac{2}{1+\alpha}\left(\frac{1}{2N+1}\right)^{1+\alpha}\frac{2N+1}{2}\left(\sum_{k=0}^{j-2}\frac{1}{j-k-1}+\sum_{k=j+2}^{2N-1}\frac{1}{k-j-1}\right)\le$$

$$\le\frac{1+o(1)}{1+\alpha}\left(\frac{1}{2N+1}\right)^{\alpha}(\ln j+\ln(2N-j))\le\frac{(1+o(1))2^{1-\alpha}}{1+\alpha}N^{-\alpha}\ln N. \tag{1.19}$$

Осталось оценить интеграл

$$\left|\int\limits_{t_{j-1}}^{t_{j+2}}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t'_j)}{\tau-t}d\tau\right|.$$

Обозначим через $d=\min(t-t_{j-1},t_{j+2}-t)$. Тогда в предположении, что $d<t_{j+2}-t$,

$$\left|\int\limits_{t_{j-1}}^{t_{j+2}}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t'_j)}{\tau-t}d\tau\right|\le\left|\int\limits_{t-d}^{t+d}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau\right|+\left|\int\limits_{t+d}^{t_{j+2}}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t'_j)}{\tau-t}d\tau\right|=$$

$$=(N^{-\alpha})=o\left(\frac{2^{1-\alpha}}{1+\alpha}N^{-\alpha}\ln N\right). \tag{1.20}$$

Из неравенств (1.16) – (1.20) следует, что оценка погрешности к.ф. (1.4) при $t_0 \le t \le t_{2N}$ асимптотически равна $2^{1-\alpha} \ln N/N^{\alpha}(1+\alpha)$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.4. Оценим сначала погрешность снизу к.ф. (1.2). При рассмотрении узлов t_k $(k = -N, \cdots, N)$ могут встретиться две возможности:

1) найдется такое k, что $t_{k+1} - t_k > h = 2[\alpha C_\alpha \ln N]^{1/\alpha}(2N+1)^{-1}$;

2) расстояние между двумя соседними узлами меньше, чем h.

Исследование первой возможности ничем не отличается от аналогичного исследования, приведенного при доказательстве теоремы 1.2. Поэтому на первой возможности не останавливаемся.

Перейдем ко второй возможности. Пусть $M-$ целое число, такое что $2M = [2/h]$. Разобьем весь сегмент $[-1, 1]$ на $2M$ равных частей точками $v_k = -1 + k/M$, $k = 0, 1, \ldots, 2M$. Полученные сегменты обозначим $\Delta_k = [v_k, v_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, 2M-1$. По построению на каждом сегменте Δ_k найдется, по крайней мере, один узел t_k к.ф. (1.2). Выбранные узлы будем обозначать $t_k^*(k = 0, 1, \ldots, 2M-1)$.

Пусть $\varphi^*(t)$ – неотрицательная функция, обращающаяся в нуль в узлах t_k $(k = -N, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, N)$ и определенная формулой
$\varphi^*(t) = \omega(t - t_N)\ \ \mathrm{t} \in [\mathrm{t_N}, 1], \omega(\mathrm{t_N} - \mathrm{t})\ \ \mathrm{t} \in [-1, \mathrm{t_N}], \omega(\min\limits_{\mathrm{i}=-\mathrm{N},\ldots,\mathrm{N}} |\mathrm{t} - \mathrm{t_i}|)\ \ \mathrm{t_k} \le \mathrm{t} \le \mathrm{t_{k+1}}.$
Возьмем произвольный узел t_j^* $(j = 0, 1, \ldots, 2M-1)$ и через $\varphi_j^*(t)$ обозначим функцию, определяемую по формуле

$$\varphi_j^*(t) = \begin{cases} 0 \ \ \mathrm{t} \in [\mathrm{v_{j-\gamma}}, \mathrm{v_{j+\gamma}}], \\ \varphi^*(t)\ \mathrm{sgn}(\mathrm{t} - \mathrm{t_j^*}) \quad \mathrm{t}, \end{cases}$$

где $\gamma-$ константа, определенная при доказательстве теоремы 1.2.

Оценим снизу величину

$$R_N(\varphi_j^*) = \sum_{k=1}^{2M-j-1} \int\limits_{v_{k+j}}^{v_{k+j+1}} \frac{\varphi_j^*(\tau)}{\tau - t_j^*} d\tau + \sum_{k=0}^{j-1} \int\limits_{v_{j-k-1}}^{v_{j-k}} \frac{\varphi_j^*(\tau)}{\tau - t_j^*} d\tau \ge$$

$$\ge \sum_{k=1}^{2M-j-1} \frac{1}{|v_{k+j+1} - t_j^*|} \int\limits_{v_{k+j}}^{v_{k+j+1}} \varphi^*(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{|v_{j-k-1} - t_j^*|} \int\limits_{v_{j-k-1}}^{v_{j-k}} \varphi^*(\tau) d\tau \ge$$

$$\geq M \sum_{k=1}^{2M-j-1} \frac{1}{k+1} \int\limits_{v_{k+j}}^{v_{k+j+1}} \varphi^*(\tau)d\tau + M \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{k+1} \int\limits_{v_{j-k-1}}^{v_{j-k}} \varphi^*(\tau)d\tau,$$

где $\varphi^*(\tau) = min_k|\tau - t_k|^\alpha$.

Так как $\max_j R_N(\varphi_j^*)$ не меньше средней величины значений $R_N(\varphi_j^*)$, вычисленных по любой выборке $j_1, \ldots, j_v$ узлов t_j^*, то повторяя выкладки, проделанные при доказательстве предыдущей теоремы, имеем

$$\max_t R_N(t, t_k, p_k, \varphi_j^*) \geq \frac{1}{2M} \sum_j^{2M-1} {}' R_N(t_j^*, t_k, p_k, \varphi_j^*) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{M} \frac{1}{k+1} \left[\int\limits_{-1}^{1} \varphi^*(\tau)d\tau + \int\limits_{v_{M+k}}^{v_{M-k}} \varphi^*(\tau)d\tau \right].$$

Оценим снизу интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} \varphi(\tau)d\tau$$

в предположении, что подынтегральная функция обращается в нуль в N узлах: t_k $(-1 \leq t_1 < \cdots < t_N \leq 1)$. Обозначим через Δ_k, Δ_k' и Δ_k'' сегменты $[t_k, t_{k+1}]$, $[t_k, (t_k + t_{k+1})/2]$ и $[(t_k + t_{k+1})/2, t_{k+1}]$. Введем в рассмотрение функцию

$\psi(t) = \omega(t - t_N)$ $\mathrm{t} \in [\mathrm{t_N}, 1] = \Delta_\mathrm{N}, \omega(\mathrm{t_1} - \mathrm{t})$ $\mathrm{t} \in [-1, \mathrm{t_1}] = \Delta_0, \omega(\min\limits_{1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{N}} |\mathrm{t} - \mathrm{t_i}|)$ $\mathrm{t_{k-1}} \leq$

Тогда

$$\delta = \int\limits_{-1}^{1} \psi(t)dt = \int\limits_{\Delta_0} \omega(t_1 - t)dt + \int\limits_{\Delta_N} \omega(t - t_N)dt +$$

$$+2 \left[\sum_{k=1}^{N-1} \int\limits_{\Delta_k} \omega(|t - t_k|)dt \right].$$

Найдем минимум функции δ в предположении, что

$$\Delta_0 + \Delta_N + 2(\Delta_1 + \cdots + \Delta_{N-1}) = 2.$$

Выразим Δ_0 из последнего равенства и подставим в функцию δ. Предварительно представим функцию δ в следующем виде:

$$\delta = \int\limits_0^{l_0} \omega(t)dt + \int\limits_0^{l_N} \omega(t)dt + 2\sum_{k=1}^{N-1} \int\limits_0^{l_k} \omega(t)dt,$$

где l_k– длина сегмента Δ_k, $k = 0, 1, \cdots, N$.

После указанной подстановки

$$\delta = \int\limits_0^{2-l_N-2(l_1+\cdots+l_{N-1})} \omega(t)dt + \int\limits_0^{l_N} \omega(t)dt + 2\sum_{k=1}^{N-1} \int\limits_0^{l_k} \omega(t)dt.$$

Взяв частные производные по переменным $l_1, \cdots, l_N$, имеем
$-\omega(2 - l_N - 2(l_1 + \cdots + l_{N-1})) + \omega(l_N) = 0$,
$-2\omega(2 - l_N - 2(l_1 + \cdots + l_{N-1})) + 2\omega(l_k) = 0$, $k = 1, 2, \cdots, N-1$.
Отсюда $\omega(l_0) = \omega(l_1) = \cdots = \omega(l_N)$.

Если предположить, что функция $\omega(t)$ монотонна (в строгом смысле), то из последнего равенства следует, что функция δ достигает своего минимума при $l_0 = l_1 = \cdots = l_N$. Поэтому

$$\delta = 2N \int\limits_0^{1/N} \omega(t)dt.$$

Рассмотрим теперь интеграл $\int\limits_{v_k}^{v_{2M-k}} \varphi(t)dt$. На сегменте $[v_k, v_{2M-k}]$ может находиться не более $2(N-k)+1$ нулей. Будем считать, что на этом сегменте содержится точно $2(N-k)+1$ нуль. Длина сегмента $2(M-k)/M$. Повторяя проделанные ранее выкладки, получаем оценку

$$\int\limits_{v_k}^{v_{2M-k}} \varphi(t)dt \geq 4(N-k) \int\limits_0^{\frac{M-k}{M(2N-2k+1)}} \omega(t)dt = 4(N-k) \int\limits_0^{\frac{1}{2N+1}\frac{(M-k)(2N+1)}{M(2N-2k+1)}} \omega(t)dt \geq$$

$$\geq \frac{4(N-k)(M-k)^2(2N+1)^2}{M^2(2N-2k+1)^2} \int\limits_0^{1/(2N+1)} \omega(t)dt \geq$$

$$\geq 4N\left(1-\frac{2k}{M}+\frac{k^2}{M^2}\right) \int\limits_0^{1/(2N+1)} \omega(t)dt.$$

Таким образом, окончательно

$$\max_t R_N(t, t_k, p_k, \varphi_j^*) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{M}\frac{1}{k+1}\left[(4N+2)\int\limits_0^{1/(2N+1)} \omega(t)dt + 2N(1-\frac{2k}{M}+\frac{k^2}{M^2})\int\limits_0^{1/(2N+1)} \omega(t)dt\right].$$

Первая сумма оценивается без труда

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{M}\frac{1}{k+1}(4N+2)\int\limits_0^{1/(2N+1)} \omega(t)dt \sim (2N+1)\ln N \int\limits_0^{1/(2N+1)} \omega(t)dt.$$

Займемся теперь оценкой второй суммы

$$N\int\limits_0^{1/(2N+1)} \omega(t)dt \sum_{k=0}^{M}\frac{1}{k+1}(1-\frac{2k}{M}+\frac{k^2}{M^2}) \sim (2N+1)\ln N \int\limits_0^{1/(2N+1)} \omega(t)dt.$$

Таким образом,

$$\max_t R_N(\varphi_j^*, t_k, p_k, t) \geq 2(1+o(1))(2N+1)\ln N \int\limits_0^{1/(2N+1)} \omega(t)dt.$$

Оценка снизу получена.

Погрешность к.ф. (1.5) может быть представлена в виде

$$|R_N(\varphi)| \leq \left|\int\limits_{-1}^{t_0} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_0)}{\tau-t}d\tau\right| + \left|\int\limits_{t_{2N}}^{1} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_{2N})}{\tau-t}d\tau\right| +$$

$$+\sum_{k=0}^{2N-1}{}' \left| \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t'_k)}{\tau-t} d\tau \right| + \left| \int\limits_{t_{j-1}}^{t-d} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t'_{j-1})}{\tau-t} d\tau \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{t+d}^{t_{j+2}} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t'_{j+1})}{\tau-t} d\tau \right| + \left| \int\limits_{t-d}^{t+d} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau \right|. \qquad (1.21)$$

Оценим каждое из слагаемых, стоящих в правой части неравенства (1.21):

$$\left| \int\limits_{-1}^{t_0} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_0)}{\tau-t} d\tau \right| \le \int\limits_{-1}^{t_0} \frac{|\varphi(\tau)-\varphi(t_0)|}{|\tau-t|} d\tau \le$$

$$\le \frac{N+1}{2} \int\limits_{0}^{1/(2N+1)} \omega(t)dt. \qquad (1.22)$$

Эта же оценка справедлива и для второго слагаемого.

Перейдем теперь к оценке суммы

$$\sum_{k=0}^{2N-1}{}' \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left| \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t'_k)}{\tau-t} \right| d\tau = \sum_{k=0}^{j-2} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{|\varphi(\tau)-\varphi(t'_k)|}{|\tau-t|} d\tau +$$

$$+ \sum_{k=j+2}^{2N-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{|\varphi(\tau)-\varphi(t'_k)|}{|\tau-t|} d\tau \le \sum_{k=0}^{j-2} \frac{2}{|t_{k+1}-t_j|} \int\limits_{0}^{1/(2N+1)} \omega(t)dt +$$

$$+ \sum_{k=j+2}^{2N-1} \frac{2}{|t_k-t_{j+1}|} \int\limits_{0}^{1/(2N+1)} \omega(t)dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{j-2} \frac{2N+1}{j-k-1} \int\limits_{0}^{1/(2N+1)} \omega(t)dt + \sum_{k=j+2}^{2N-1} \frac{2N+1}{k-j-1} \int\limits_{0}^{1/(2N+1)} \omega(t)dt \sim$$

$$\sim (2N+1) \int\limits_{0}^{1/(2N+1)} \omega(t)dt[\ln j + \ln(2N-j)] \le$$

$$\leq 2(2N+1) \int\limits_0^{1/(2N+1)} \omega(t)dt \ln N. \tag{1.23}$$

Выражение $[\ln j + \ln(2N-j)]$ можно представить и в виде

$$[\ln(j/(2N+1)) + \ln((2N-j)/(2N+1)) + 2\ln(2N+1)] =$$

$$= 2\ln(2N+1) + \ln(t+1) + \ln(1-t) = 2\ln(2N+1) + \ln(1-t^2).$$

Поэтому справедлива и такая оценка

$$\sum_{k=0}^{2N-1}{}' \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left| \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t'_k)}{\tau - t} \right| d\tau =$$

$$= (1+o(1))(2N+1)[2\ln(2N+1) + \ln(1-t^2)] \int\limits_0^{1/(2N+1)} \omega(t)dt.$$

Интегралы

$$\left| \int\limits_{t_{j-1}}^{t-d} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t'_{j-1})}{\tau - t} d\tau \right|$$

и

$$\left| \int\limits_{t+d}^{t_{j+2}} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t'_{j+1})}{\tau - t} d\tau \right|$$

оцениваются одинаково. Поэтому ограничимся рассмотрением первого из них

$$\left| \int\limits_{t_{j-1}}^{t-d} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t'_{j-1})}{\tau - t} d\tau \right| \leq (2N+1) \int\limits_{t_{j-1}}^{t-d} \omega(\tau - t_{j-1}) d\tau \leq$$

$$\leq (2N+1) \int\limits_0^{3/(2N+1)} \omega(t)dt \leq 9(2N+1) \int\limits_0^{1/(2N+1)} \omega(t)dt. \tag{1.24}$$

Здесь использовалась следующая лемма из монографии А.И. Гусейнова и Х.Ш. Мухтарова [67] (см. с. 52).

Лемма 1.1 [67]. Если $\omega(\sigma)$ является модулем непрерывности, то справедливо неравенство

$$\frac{1}{x+y}\int\limits_0^{x+y}\omega(t)dt \le \frac{1}{x}\int\limits_0^{x}\omega(t)dt + \frac{1}{y}\int\limits_0^{y}\omega(t)dt.$$

Осталось оценить интеграл

$$\left|\int\limits_{t-d}^{t+d}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\right| = \left|\int\limits_{t-d}^{t+d}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau\right| \le 2\int\limits_0^{1/(2N+1)}\frac{\omega(t)}{t}dt. \tag{1.25}$$

Так как функция $\omega(\sigma)\in\Phi$, то $\omega(\sigma)/\sigma^{\alpha}-$ почти возростающая функция. Следовательно, для любых двух значений t_1 и t_2 на $(0,2]$ таких, что $t_1\le t_2$, $\omega(t_1)\le C_\alpha t_1^{\alpha}\omega(t_2)t_2^{-\alpha}$. Поэтому

$$\int\limits_0^{1/(2N+1)}\frac{\omega(t)}{t}dt \le C_\alpha\omega\left(\frac{1}{2N+1}\right)(2N+1)\int\limits_0^{1/(2N+1)}t^{\alpha-1}dt =$$

$$= \frac{C_\alpha}{\alpha}\omega\left(\frac{1}{2N+1}\right) \le \frac{2C_\alpha}{\alpha}(2N+1)\int\limits_0^{1/(2N+1)}\omega(t)dt. \tag{1.26}$$

Собирая вместе оценки (1.21) – (1.26), убеждаемся в справедливости асимптотических равенств

$$R_N[\Psi] = (1+o(1))2(2N+1)\ln N\int\limits_0^{1/(2N+1)}\omega(t)dt,$$

$$R_N[\Psi] = (1+o(1))(2N+1)[2\ln(2N+1)+\ln(1-t^2)]\int\limits_0^{1/(2N+1)}\omega(t)dt.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.5. Оценка снизу функционала $\zeta_N[\Psi]$ была получена при доказательстве теоремы 1.3.

Погрешность R_N к.ф. (1.6) в предположении, что $t_1 < t < t_{2N-1}$ может быть представлена в виде

$$|R_N(\varphi)| \le \sum_{k=0}^{2N-1}{}' \left| \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t'_k)}{\tau - t} d\tau \right| + \left| \int\limits_{t_{j-1}}^{t_{j+2}} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t'_j)}{\tau - t} d\tau \right|. \qquad (1.27)$$

Так как $\varphi(t) \in H_\alpha(1)$, то

$$\sum_{k=0}^{2N-1}{}' \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left| \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t'_k)}{\tau - t} \right| d\tau = \sum_{k=0}^{j-2} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left| \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t'_k)}{\tau - t} \right| d\tau +$$

$$+ \sum_{k=j+2}^{2N-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left| \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t'_k)}{\tau - t} \right| d\tau \le \sum_{k=0}^{j-2} \frac{1}{|t_{k+1}-t_j|} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} |\varphi(\tau)-\varphi(t'_k)| d\tau +$$

$$+ \sum_{k=j+2}^{2N-1} \frac{1}{t_k - t_{j+1}} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} |\varphi(\tau)-\varphi(t'_k)| d\tau \le$$

$$\le \frac{2}{1+\alpha} \left[\frac{1}{2N+1} \right]^{1+\alpha} \frac{2N+1}{2} \left[\sum_{k=0}^{j-2} \frac{1}{j-k-1} + \sum_{k=j+2}^{2N-1} \frac{1}{k-j-1} \right] \le$$

$$\le \frac{1}{1+\alpha} \left[\frac{1}{2N+1} \right] \left[\ln j + \ln(2N-j) \right] \le 2^{1-\alpha}(1+\alpha)^{-1} N^{-\alpha} \ln N. \quad (1.28)$$

Осталось оценить интеграл $\left| \int\limits_{t_{j-1}}^{t_{j+2}} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t'_j)}{\tau - t} d\tau \right|$. Обозначим через $d = \min(t - t_{j-1}, t_{j+2} - t)$. Тогда в предположении, что $d < t_{j+2} - t$,

$$\left| \int\limits_{t_{j-1}}^{t_{j+2}} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t'_j)}{\tau - t} d\tau \right| \le \left| \int\limits_{t-d}^{t+d} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau - t} d\tau \right| + \left| \int\limits_{t+d}^{t_{j+2}} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t'_j)}{\tau - t} d\tau \right| =$$

$$= O(N^{-\alpha}) = o\left(\frac{2^{1-\alpha}}{1+\alpha} N^{-\alpha} \ln N \right). \qquad (1.29)$$

Из неравенств (1.27) – (1.29) следует, что оценка погрешности к.ф. (1.6) при $t_1 \le t \le t_{2N-1}$ асимптотически равна $2^{1-\alpha} \ln N / N^\alpha (1+\alpha)$. Аналогично доказываются остальные случаи. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.6 проводится по аналогии с доказательствами предыдущих теорем.

Доказательство теоремы 1.7. Оценка снизу верхней грани погрешности к.ф. (1.1) на классе функций $H_\alpha(1)$ получена в теореме 1.1. Оценим погрешность к.ф. (1.8). Пусть $s \in [t_j, t_{j+1})$. Так как оператор $F\varphi$ отображает множество функций H_α $(0 < \alpha < 1)$ в себя, то для любой функции $\varphi \in H_\alpha :\ |F\varphi(s) - F\varphi(t'_j)| \leq AN^{-\alpha}$. Нетрудно видеть, что

$$\left| F\varphi(t'_j) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi(t'_k) \mathrm{ctg} \frac{\sigma - t'_j}{2} d\sigma \right| \leq (1 + o(1)) 2 \ln N / \pi^{1+\alpha} (1 + \alpha) N^\alpha.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.8 проводится аналогично.

1.2. Асимптотически оптимальные пассивные алгоритмы на классе $\mathbf{W^rH}_\alpha$ $(\mathbf{r} \geq \mathbf{1})$

1.2.1. Формулировки теорем

При вычислении сингулярного интеграла $\mathcal{F}\varphi$ наряду с к.ф. вида (1.1) могут быть использованы формулы

$$\mathcal{F}\varphi = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl}(s)\varphi^{(l)}(s_k) + R_N(s, s_k, p_{kl}(s), \varphi). \tag{1.30}$$

Точно так же для вычисления интеграла $T\varphi$ наряду с квадратурными формулами вида (1.2) могут использоваться формулы вида

$$T\varphi = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl}(t)\varphi^{(l)}(t_k) + R_N(t, t_k, p_{kl}, \varphi). \tag{1.31}$$

Теорема 1.9 [29]. Пусть $\Psi = \tilde{W}^r(1)(r = 1, 2\cdots)$ и интеграл $\mathcal{F}\varphi$ вычисляется по к.ф. вида (1.1) и (1.30), причем в последней полагается $\rho = 1$. Тогда $\zeta_N[\Psi] \geq 2K_r\pi^{-1}N^{-r}\ln N + O(N^{-r})$.

Теорема 1.10 [29]. Пусть $\Psi = \tilde{W}^r(1)$, $r = 1, 2, \cdots$ и интеграл $T\varphi$ вычисляется по к.ф. вида (1.2) и (1.31), причем в последнем случае $\rho = 1$. Тогда

$$\zeta_N[\Psi] \geq \frac{(1 + o(1))2^r \ln N}{N^r} \mathrm{inf_c} \|\mathrm{B_r^*(t) - c}\|_{\mathrm{L_1[0,1]}}$$

при вычислении по квадратурным формулам вида (1.2) и

$$\zeta_N[\Psi] \geq \frac{(2 + o(1)) \ln N}{2^r r![2(N-1) + (r+1)^{1/r}]^r}$$

при вычислении по квадратурным формулам вида (1.31).

Обозначим через S_{nr} $(r, n = 1, 2, \ldots)$ множество сплайнов порядка r дефекта 1 по равномерному разбиению $x_k = 2k\pi/n$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Сплайн $s_{nr}(f, x) \in S_{nr}$ интерполирует функцию $f \in C$ в точках $t_i = x_i + \frac{(1+(-1)^r)}{4n}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

Теорема 1.11 [29]. На классе $\tilde{W}^r(1)$ $(r = 1, 2, \ldots)$ к.ф.

$$\mathcal{F}\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s_{n,r-1}(f, \sigma) \mathrm{ctg} \frac{\sigma - \mathrm{s}}{2} \mathrm{d}\sigma + \mathrm{R_n(s, s_k, p_k(s), \varphi)} \tag{1.32}$$

имеет погрешность $R_N[\tilde{W}^r(1)] \leq (1 + o(1))2K_r\pi^{-1}n^{-r}\ln n$.

1.2.2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1.9. Найдем оценку снизу величины $\zeta_N[\Psi]$.

Имеются две возможности: 1) хотя бы одно из значений $s_{k+1} - s_k$ не меньше $h_0 = 2(A^{-1}K_r(r+1)\ln N)^{1/2}N^{-r}$; 2) каждое из этих значений в отдельности меньше h_0. Константа A определяется ниже.

В первом случае, полагая без ограничения общности, что $s_2 - s_1 \geq$ $\geq h_0$, рассмотрим интеграл

$$\max_{0\leq s\leq 2\pi}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi^*(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma \geq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi^*(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}_1}{2}\mathrm{d}\sigma \geq$$

$$\geq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{s_1}^{(s_1+s_2)/2}\varphi^*(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}_1}{2}\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\mathrm{s}_1+\mathrm{s}_2)/2}^{\mathrm{s}_2}\varphi^*(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}_1}{2}\mathrm{d}\sigma \qquad (1.33)$$

от функции $\varphi^*(\sigma) = A((\sigma-s_1)(s_2-\sigma))^r((s_2+s_1)/2)^{-r}$ на сегменте $[s_1, s_2]$ и $\varphi^*(\sigma) = 0$ на остальных сегментах. Константа A подбирается таким образом, чтобы $|(\varphi^*)^{(r)}| \leq 1$. Такая константа существует.

Оценим слагаемые, стоящие в правой части неравенства (1.33). Нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{s_1}^{(s_1+s_2)/2}\varphi^*(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}_1}{2}\mathrm{d}\sigma \geq \frac{\mathrm{A}}{\pi\mathrm{r}}\left(\frac{\mathrm{s}_2-\mathrm{s}_1}{2}\right)^{\mathrm{r}},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(s_1+s_2)/2}^{s_2}\varphi^*(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}_1}{2}\mathrm{d}\sigma \geq \frac{\mathrm{A}}{\pi(\mathrm{r}+1)}\left(\frac{\mathrm{s}_2-\mathrm{s}_1}{2}\right)^{\mathrm{r}}.$$

Из неравенства (1.33) и двух предыдущих неравенств следует

$$\max_{0\leq s\leq 2\pi}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi^*(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma \geq \frac{2\mathrm{K_r}\ln\mathrm{N}}{\pi\mathrm{N^r}}.$$

Перейдем ко второму случаю. Обозначим через $\varphi^*(\sigma)$ функцию, удовлетворяющую следующим условиям: 1) $\varphi^*(\sigma) \in \Psi = \tilde{W}^r(1)$;
2) $\min\varphi^*(\sigma) = \varphi^*(\mathrm{s_k}) = 0\,(\mathrm{k} = 1, 2, \ldots, \mathrm{N})$; 3) $\int\limits_0^{2\pi}\varphi^*(\sigma)d\sigma \geq 2\pi K_r/N^r$.

Существование такой функции доказано в работе В. П. Моторного [107] (см. также разд. 3 главы 1).

Разделим сегмент $[0, 2\pi]$ на M равных частей ($M = [2\pi/h]$) точками $v_k = 2k\pi/M$, $k = 0, 1, \ldots, M$. В каждом сегменте $[v_k, v_{k+1}]$ имеется , по крайней мере, один узел к.ф. (1.1). Обозначим этот узел через s_k^*. Возьмем произвольное число $j(0 \leq j \leq M)$ и выделим сегменты $[s_{j-1}^*, s_{j+1}^*]$, $[s_{k-2}^*, s_{k+2}^*]$, причем $(s_j^* + \pi) \subset [s_{k-2}^*, s_{k+2}^*]$. Обозначим через $\psi_j^*(\sigma)$ функцию, удовлетворяющую следующим условиям: 1) $\psi_j^*(\sigma) \in \Psi = \tilde{W}^r$; 2) на сегменте $[s_{j+1}^*, s_{k-2}^*]$ $\psi_j^*(\sigma) = \varphi^*(\sigma)$; 3) на сегменте $[s_{k+2}^*, s_{j-1}^*]$ $\psi_j^*(\sigma) = -\varphi^*(\sigma)$. Таким образом, задача построения функции $\psi_j^*(\sigma)$ заключается в том, чтобы на сегментах $[s_{j-1}^*, s_{j+1}^*]$ и $[s_{k-2}^*, s_{k+2}^*]$ найти функцию, r-я производная которой не превышает по модулю единицы и которая вместе со своими производными до
r-го порядка в точках s_{j-1}^*, s_{j+1}^*, и s_{k-2}^*, s_{k+2}^* равны значениям функций $\pm\varphi^*(\sigma)$ и их производным до $r-1$ порядка.

Совершенно очевидно, что в точках s_{j-1}^* и s_{k+2}^* значение функции $\varphi^*(\sigma)$ и ее производных берутся со знаком "минус", а в точках s_{j+1}^* и s_{k-1}^*– со знаком "плюс".

При $r = 1, 2$ функцию $\psi_j^*(\sigma)$ на сегментах $[s_{j-1}^*, s_{j+1}^*]$, $[s_{k-2}^*, s_{k+2}^*]$ можно положить равной нулю. Это следует из того, что в узлах $s_k(k = 1, 2, \ldots, N)$ функция $\varphi^*(\sigma)$ и ее первая производная равны нулю. В явном виде можно построить функцию $\psi_j^*(\sigma)$ и при $r = 3$, однако при $r \geq 4$ сделать этого не удалось. Поэтому для доказательства существования нужной функции естественно воспользоваться "методом срезки", примененным С.Л. Соболевым [136, с. 697] при исследовании к.ф. с пограничным слоем. Выделим сегменты $[s_{j-N_1}^*, s_{j+N_1}^*]$ и $[s_{k-N_1}^*, s_{k+N_1}^*]$, причем величина N_1 будет определена ниже. Введем функцию

$$l_j(s) = \begin{cases} 1 & [\mathrm{s}_{\mathrm{j+N_1}}^*, \mathrm{s}_{\mathrm{k-N_1}}^*], \\ -1 & [\mathrm{s}_{\mathrm{k+N_1}}^*, \mathrm{s}_{\mathrm{j-N_1}}^*], \\ 0 & [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Построим теперь "срезающий"множитель $\delta_j(s)$, равный 0 в окрестности точек s_j^* и s_k^*, равный 1 на сегменте $[s_{j+3N_1}^*, s_{k-3N_1}^*]$, -1 на сегменте $[s_{k+3N_1}^*, s_{j-3N_1}^*]$ и имеющий непрерывные производные всех порядков. При этом потребуем, чтобы $\delta_j(s)\varphi^*(s) \in W^r$. В качестве функции $\delta_j(s)$ возьмем среднюю функцию (с бесконечно дифференцируемым ядром усреднения) с радиусом усреднения $h = 2N_1\pi/M$ для функции $l_j(s)$. Нетрудно

видеть, что в окрестности точек s_j^*, s_k^* функция $\delta_j(s)$ равна нулю, на сегментах $[s^*_{j+3N_1}, s^*_{k-3N_1}]$ и $[s^*_{k+3N_1}, s^*_{j-3N_1}]$ она соответственно равна единице и минус единице и имеет производные всех порядков.

Напомним, что по определению средняя функция имеет вид

$$\delta_j^h(s) = \xi h \int\limits_{s-\pi}^{s+\pi} \omega\left(\frac{s-\sigma}{h}\right) l_j(\sigma) d\sigma,$$

где $\omega((s-\sigma)/h)-$ ядро усреднения, удовлетворяющее стандартным требованиям (С.Л. Соболев [136 с. 104]), $\xi-$ коэффициент нормировки. Из определения функции $\delta_j^h(s)$ следует, что

$$\frac{d^r \delta_j^h(s)}{d^r s} = \xi h^{1-r} \int\limits_{s-\pi}^{s+\pi} \omega^{(r)}\left(\frac{s-\sigma}{h}\right) l_j(\sigma) d\sigma = O(h^{-r}).$$

Теперь можно оценить в метрике C норму производной r порядка от произведения $\delta_j(s)\varphi^*(s)$. Прежде всего отметим, что так как функция $\varphi^*(s)$ имеет r-ю производную, по модулю не превышающую единицу, и в N точках, отстоящих друг от друга на расстоянии, не большем h_0, обращается в нуль, то ее $r-1$ производная обращается в нуль не менее чем в $N-r+1$ точках, отстоящих друг от друга на расстоянии не большем $2^{r-1}h_0$. Так как $|\varphi^*(r)(s)| \leq 1$, то $|\varphi^{*(r-1)}(s)| \leq 2^{r-1}h_0$, $|\varphi^{*(r-2)}(s)| \leq 2^{2r-3}h_0^2, \ldots, |\varphi^*(s)| \leq 2^{r^2/2}h_0^r$.

Следовательно,

$$|(\delta_j(s)\varphi^*(s))^{(r)}| = |(\delta_j^{(r)}(s)\varphi^*(s) + C_r^1 \delta_j^{(r-1)}(s)\varphi^{*(1)}(s) + \cdots + \delta_j(s)\varphi^{*(r)}(s)|.$$

На сегментах $[s^*_{j+N_1}, s^*_{k-N_1}]$, $[s^*_{k+N_1}, s^*_{j-N_1}]$, $|(\delta_j(s)\varphi^*(s))^{(r)}| =$ $= |\delta_j(s)\varphi^{(r)}(s)| \leq 1$, а при остальных значениях s $|(\delta_j(s)\varphi^*(s))^{(r)}| =$ $= o(h^{-r}h_0^r + h^{2-r}h_0^{r-1} + \cdots + h^{-1}h_0) + 1$. Выберем теперь h таким, чтобы $|(\delta_j(s)\varphi(s))^*(r)| = 1 + o(1)$ при всех j. Для этого, очевидно, достаточно положить $h = h_0 \ln N$. Следовательно, $N_1 = [\ln N] + 1$.

Зафиксируем положительное как угодно малое ϵ $(0 < \epsilon < 1)$ и пусть $\beta = 1 - \epsilon$.

Функция $\psi_j(s) = \delta_j(s)\varphi(s)\beta$ при достаточно больших N удовлетворяют всем сформулированным требованиям. Поэтому, повторяя рассужде-

ния, сделанные при доказательстве теоремы 1.1, имеем

$$\sup_{s,j} F\psi_j(s) \geq (1+o(1))\frac{\ln N}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\varphi^*(\sigma)d\sigma \geq$$

$$\geq (2+o(1))(1-\epsilon)K_r\frac{\ln N}{N^r}.$$

Из произвольности ϵ следует окончательная оценка

$$\sup_{\varphi\in\tilde{W}^r(1)} F\varphi \geq (2+o(1))K_r\frac{\ln N}{N^r}.$$

В случае к.ф. вида (1.1) теорема доказана. Из определения функций $\varphi_j(s)$ следует, что проведенные рассуждения справедливы и для к.ф. вида (1.30).

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.10 проводится по аналогии с доказательством предыдущей теоремы.

Доказательство теоремы 1.11. Пусть $s\in[t_j,t_{j+1})$. Обозначим через Δ сегмент $[s-2\pi/n, s+2\pi/n]$. Тогда погрешность к.ф. (1.32) может быть представлена следующим образом

$$|R_N(\varphi)| \leq \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta}(\varphi(\sigma)-s_{n,r-1}(\varphi,\sigma))\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}{}'\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(\varphi(\sigma)-s_{n,r-1}(\varphi,\sigma))\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}{}''\int\limits_{v_{k-1}}^{v_k}(\varphi(\sigma)-s_{n,r-1}(\varphi,\sigma))\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma\right| = I_1+I_2+I_3,$$

где $[v_k,v_{k+1}]=[t_k,t_{k+1}]\cap C_{[0,2\pi]\setminus\Delta}$, $C_{[0,2\pi]\setminus\Delta}-$ дополнение Δ до сегмента $[0,2\pi]$, $\sum'$ означает суммирование по сегментам, не пересекающимся с Δ, $\sum''$ – суммирование по сегментам, пересекающимся с Δ.

Обозначим через $\psi(\sigma)$ функцию $\varphi(\sigma) - s_{n,r-1}(\varphi,\sigma)$ и оценим первое слагаемое

$$I_1 = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta}\psi(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta}(\psi(\sigma)-\psi(s))\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma\right| \le$$

$$\le \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{s}^{s+2\pi/n}\left(\int\limits_{s}^{\sigma}\psi'(v)dv\right)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma\right| = o\left(\frac{2K_r\ln n}{\pi n^r}\right).$$

Оценим два оставшихся слагаемых. Используя оценки аппроксимации сплайнами, приведенные в теореме 3.16 главы 1, нетрудно видеть, что

$$I_2 = \left|\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}{}'\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(\varphi(\sigma)-s_{n,r-1}(\varphi,\sigma))\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{[n/2]}{}'\int\limits_{t_{j+k}}^{t_{j+k+1}}|\varphi(\sigma)-s_{n,r-1}(\varphi,\sigma)||\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma| \le \frac{2\mathrm{K_r}\ln\mathrm{n}}{\pi\mathrm{n^r}}.$$

Выражение I_3 оценивается аналогично, и так как оно состоит не более чем из четырех слагаемых, то $I_3 = o(2K_r\ln n/\pi n^r)$. Объединяя оценки I_1, I_2, I_3, завершаем доказательство теоремы. Теорема доказана.

1.3. Оптимальные по порядку пассивные алгоритмы

При вычислении сингулярных интегралов по ассимптотически оптимальным к.ф., построенным в п. 1.1, 1.2, необходимо вычислить коэффициенты $p_k(s)$ при каждом значении s. Представляет значительный интерес построение менее точных, но зато более просто реализуемых алгоритмов.

1.3.1. Формулировки теорем

Разделим сегмент $[0, 2\pi]$ на N равных частей точками $t_k = 2k\pi/N$, $k = 0, 1, \cdots, N$. Пусть точка s попадает в сегмент $[t_j, t_{j+1}]$. Интеграл $\mathcal{F}\varphi$ будем вычислять по формуле

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\varphi(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\pi}\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{N}}\varphi(\mathrm{t'_k})\ln\frac{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{N}}(2\mathrm{k}-2\mathrm{j}-1)}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{N}}(2\mathrm{k}-2\mathrm{j}-3)}+$$

$$+R_N(s,\varphi), \tag{1.34}$$

где $t'_k = (2k+1)\pi/N$.

Теорема 1.12 [29]. Пусть $\Psi = H_\alpha(1)$ $(0 < \alpha \leq 1)$. Квадратурная формула (1.34) имеет погрешность $R_N[\Psi] \leq 2^{1+\alpha} \ln N/\pi^{1-\alpha}(1+\alpha)N^\alpha + O(N^{-\alpha})$.

При вычислении сингулярных интегралов можно использовать к.ф., основанные на замене подынтегральной функции некоторым аппроксимирующим агрегатом. Особенно часто (см. [78], [81]) используется замена подынтегральной функции интерполяционным полиномом Лангранжа, построенным по $2N+1$ равностоящему узлу $s_k = 2k\pi/(2N+1)$, $k = 0, 1, \cdots, 2N$. Интерполяционный полином записывается (см. [112]) формулой

$$P_N[\varphi] = \sum_{k=0}^{2N} \varphi(s_k)\psi_k(s),\ \psi_k(s) = \frac{1}{2N+1}\frac{\sin\frac{2N+1}{2}(s-s_k)}{\sin\frac{s-s_k}{2}}$$

и квадратурная формула имеет вид

$$\mathcal{F}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}[P_N[\varphi](\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma + \mathrm{R_N}(\varphi). \tag{1.35}$$

Эта к.ф. может быть представлена в виде конечной суммы

$$\mathcal{F}\varphi = -\frac{2}{2N+1}\sum_{k=0}^{2N}\varphi(s_k)\frac{\sin(N+1)\frac{s-s_k}{2}\sin N\frac{s-s_k}{2}}{\sin\frac{s-s_k}{2}} + R_N(\varphi).$$

Предположим, что функция $\varphi(t)$ представима в виде свертки

$$\varphi(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} G(x-t)h(t)dt, \tag{1.36}$$

где $h(t)-$ непрерывная $2\pi-$ периодическая функция, такая, что $\max\limits_{-\pi\leq t\leq\pi}|h(t)| \leq 1$, $\mathrm{vrai}\max\limits_{-\pi\leq \mathrm{t}\leq\pi}|\tilde{\mathrm{h}}(\mathrm{t})| \leq \mathrm{K}$; $\tilde{h}(t)-$ функция, сопряженная $h(t)$, $G(t)$ обладает свойством A_{N+1}, сформулированным в работе В. М. Тихомирова [147]. Это свойство означает то, что если функция $G(x)$ четная, то для любых ξ_k $(k = 1, 2, \cdots, N)$ функция $G(x) - \sum\limits_{k=0}^{N}\xi_k\cos x$ может иметь в интервале $(0, \pi)$ не более $N+1$ нулей, или, если функция $G(x)$

нечетная, выражение $G(x) - \sum_{k=0}^{N} \xi_k \sin kx$ может иметь в интервале $(0, \pi)$ не более N нулей.

Теорема 1.13 [29]. Пусть $\varphi(t)$ принадлежит классу функций, представимых в виде свертки (1.36) и $\max_{-\pi \le t \le \pi} |h(t)| \le 1$, $vrai \max_{-\pi \le t \le \pi} |\tilde{h}(t)| \le$ $\le K$. Тогда погрешность к.ф. (1.35) на этом классе оценивается неравенством $R_N[\Psi] \le K E_{N,1}(G) + \pi^{-1} E_N(\varphi)(\ln N + C)$, где $E_{N,p}(G)$ – наилучшее в метрике L_p $[0, 2\pi]$приближение функции $G(t)$ тригонометрическими полиномами степени N, $E_N = E_{N,\infty}$, $C = 0,577215\ldots$.

Теорема 1.14 [29]. Пусть $\Psi = \tilde{W}_p^r(1)$, $1 \le p \le 2$. Тогда погрешность к.ф. (1.35) оценивается неравенством $R_N[\Psi] \le E_{N,p'}(D_r(x))(2p' + \pi^{-r} \ln N)$, где $D_r(x)$ – функции Бернулли.

Следствия.

1. При $p = \infty$

$$R_N[\Psi] \le k\pi K_r N^{-r} + K_r \pi^{-1} N^{-r}(\ln N + C). \tag{1.37}$$

2. Пусть $\varphi \in \tilde{W}_1^{2r}$ и $|\varphi^{(2r)}| \ln^+ |\varphi^{(2r)}| \in L$. Тогда

$$R_N(\varphi) \le (A \int_0^{2\pi} |\varphi^{(2r)}(t)| \ln^+ |\varphi^{(2r)}(t)| dt + B) \frac{\pi \mu(2r-1)}{2(2r-1)! N^{2r-1}} +$$

$$+ \frac{\mu(2r-1)(\ln N + C)}{2\pi(2r-1)! N^{2r-1}}, \tag{1.38}$$

где $\mu(r)$ – константа, введенная С.Н. Бернштейном [17],
$\mu(r) = \lim_{n\to\infty} n^r \xi_n(x^{r-1}\ |x|; -1, 1)$, $\xi_n(f; -1, 1)$ – наилучшее равномерное приближение функции $f(x)$ алгебраическими полиномами порядка не выше $n-1$ на сегменте $[-1, 1]$.

1.3.2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1.12. Погрешность квадратурной формулы (1.34) можно представить выражением

$$R_N(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma + (s - t'_j)) \mathrm{ctg} \frac{\sigma - \mathrm{t'_j}}{2} \mathrm{d}\sigma - \sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{N-1}} \int_{\mathrm{t_k}}^{\mathrm{t_{k+1}}} \varphi(\mathrm{t'_k}) \mathrm{ctg} \frac{\sigma - \mathrm{t'_j}}{2} \mathrm{d}\sigma \right| \le$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\left|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}(\varphi(\sigma+(s-t'_j))-\varphi(t'_k))\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{t'_j}}{2}\mathrm{d}\sigma\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{[N/2]-1}|\int\limits_{t_{k+j}}^{t_{k+j+1}}|\varphi(\sigma+(s-t'_j))-\varphi(t'_{k+j})||\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{t'_j}}{2}|\mathrm{d}\sigma+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{[N/2]-1}|\int\limits_{t_{j-k-1}}^{t_{j-k}}|\varphi(\sigma+(s-t'_j))-\varphi(t'_{j-k-1})||\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{t'_j}}{2}|\mathrm{d}\sigma+$$

$$+\frac{1}{2\pi}|\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}(\varphi(\sigma+(s-t'_j))-\varphi(t'_j))\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{t'_j}}{2}\mathrm{d}\sigma|+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{t_{j+[N/2]}}^{t_{j+[N/2]+1}}|\varphi(\sigma+(s-t'_j))-\varphi(t'_{k+[N/2]})||\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{t'_j}}{2}|\mathrm{d}\sigma =$$

$$= I_1+I_2+I_3+I_4. \tag{1.39}$$

Для оценки I_1 и I_2 достаточно повторить выкладки из доказательства теоремы 1.1

$$I_1+I_2 \leq \frac{N}{\pi^2}\sum_{k=1}^{[N/2]-1}\frac{1}{k}\int\limits_{t_{k+j}}^{t_{k+j+1}}|\sigma-t'_{k+j}+(s-t'_j)|^{\alpha}d\sigma \leq$$

$$\leq \frac{N}{\pi^2}\sum_{k=1}^{[N/2]-1}\frac{1}{k}\int\limits_{t_{k+j}}^{t_{k+j+1}}(\sigma-t'_{k+j}+(s-t'_j))^{\alpha}d\sigma \leq$$

$$\leq \frac{N}{\pi^2(1+\alpha)}[t_{k+j+1}-t'_{k+j}+s-t'_j]^{1+\alpha}\sum_{k=1}^{[N/2]-1}\frac{1}{k} \leq \frac{2^{1+\alpha}\ln N}{\pi^{1-\alpha}(1+\alpha)N^{\alpha}}.$$

Слагаемое I_3 можно представить в виде

$$I_3=\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}(\varphi(\sigma+(s-t'_j))-\varphi(s))\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{t'_j}}{2}\mathrm{d}\sigma\right| \leq \frac{2}{\pi\alpha}\left(\frac{\pi}{N}\right)^{\alpha}.$$

Аналогично оценивается слагаемое I_4. Из неравенства (1.39) и оценок $I_1 \div I_4$ следует справедливость теоремы.

Доказательство теоремы 1.13. Обозначим через $T_N[\varphi]$ полином наилучшего равномерного приближения степени N к функции φ. Тогда погрешность к.ф. (1.35) можно представить выражением

$$R_N(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\varphi(\sigma) - T_N[\varphi](\sigma))\mathrm{ctg}\frac{\sigma - \mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_N[\varphi(\sigma) - T_N[\varphi](\sigma)]\mathrm{ctg}\frac{\sigma - \mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma = \mathrm{r}_1(\mathrm{s},\varphi) - \mathrm{r}_2(\mathrm{s},\varphi). \qquad (1.40)$$

Приступая к оценке выражения r_1, предположим, что функция $G(x)$ обладает уже упомянутым выше свойством A_{N+1}, т.е. если функция $G(x)$ четная, то для любых ξ_k $(k = 1, 2, \cdots, N)$ функция $G(x) - \sum\limits_{k=0}^{N}\xi_k \cos x$ может иметь в интервале $(0, \pi)$ не более $N + 1$ нулей, или, если функция $G(x)$ нечетная, выражение $G(x) - \sum\limits_{k=0}^{N}\xi_k \sin kx$ может иметь в интервале $(0, \pi)$ не более N нулей. Будем для определенности считать, что функция $G(x)$ четная.

В статье [147] для таких функций построен в явном виде полином наилучшего приближения степени N, причем

$$\varphi(x) - T_N[\varphi] = \int\limits_0^{2\pi}(G(t) - \sum_{k=0}^{N}\xi_k^* \cos kt)h(x - t)dt.$$

Для получения оценки интеграла r_1 заметим, что

$$r_1(s,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\varphi(\sigma) - T_N[\varphi](\sigma))\mathrm{ctg}\frac{\sigma - \mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(G(t) - \sum_{k=0}^{N}\xi_k^* \cos kt)(\int\limits_0^{2\pi} h(\sigma - t)\mathrm{ctg}\frac{\sigma - \mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma)\mathrm{dt}$$

и, следовательно,

$$|r_1[\Psi]| \le \mathrm{vrai}\max_{0\le s\le 2\pi}|\tilde{h}(s)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|G(t)-\sum_{k=0}^{N}\xi_k^*\cos kt|dt \le KE_{N,1}(G).$$

Перейдем к оценке интеграла r_2. Прежде всего заметим, что

$$P_N[\varphi(\sigma)-T_N[\varphi](\sigma)] = \sum_{k=0}^{2N} y_k\psi_k(\sigma) =$$

$$= \frac{1}{2N+1}\sum_{k=0}^{2N} y_k(1+2\cos(\sigma-s_k)+\cdots+2\cos N(\sigma-s_k)).$$

Здесь использовано обозначение $y_k = \varphi(s_k) - T_N[\varphi](s_k)$ и известная формула конструктивной теории функций [112]

$$\sin\frac{2N+1}{2}\sigma/\sin\frac{\sigma}{2} = 1+2\cos\sigma+\cdots+2\cos N\sigma.$$

Подставляя приведенное выражение для $P_N[\varphi(\sigma)-T_N[\varphi](\sigma)]$ в интергал $\mathcal{F}\varphi$, имеем

$$r_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}[\frac{1}{2N+1}\sum_{k=0}^{2N} y_k(1+2\cos(\sigma-s_k)+\cdots+2\cos N(\sigma-s_k))]\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=0}^{2N} y_k\int\limits_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\cos j(\sigma-s_k)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=0}^{2N} y_k\sum_{j=1}^{N}\sin j(s-s_k) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=0}^{2N} y_k\frac{\cos\frac{s-s_k}{2}-\cos\frac{2N+1}{2}(s-s_k)}{2\sin\frac{s-s_k}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=0}^{2N} y_k\frac{\sin\frac{N+1}{2}(s-s_k)}{\sin\frac{s-s_k}{2}}\sin\frac{N}{2}(s-s_k).$$

Зафиксируем произвольное значение s. Так как величина $r_2(s,\varphi)$ оценивается на классе функций инвариантных относительно сдвига, то достаточно оценить величину погрешности в одной точке, скажем, в точке $s=0$. Тогда

$$r_2(0,\varphi) = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=1}^{2N} y_k(\sin\frac{N+1}{2}s_k \sin\frac{N}{2}s_k/\sin\frac{s_k}{2})$$

и, переходя к абсолютным величинам, оценим r_2

$$|r_2(s,\varphi)| \le \frac{1}{(2N+1)\pi}\sum_{k=1}^{2N}|y_k|\left|\sin\frac{N+1}{2}s_k \sin\frac{N}{2}s_k/\sin\frac{s_k}{2}\right| \le$$

$$\le \frac{E_N(\varphi)}{(2N+1)\pi}\sum_{k=1}^{2N}\left|\sin\frac{s_k}{2}\right|^{-1} = \frac{2E_N(\varphi)}{(2N+1)\pi}\sum_{k=1}^{N}\left|\sin\frac{s_k}{2}\right|^{-1} =$$

$$= \frac{2E_N(\varphi)}{(2N+1)\pi}\sum_{k=1}^{N}\left(\sin\frac{k\pi}{2N+1}\right)^{-1} \le \frac{E_N(\varphi)}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} \le \frac{E_N(\varphi)(\ln N + C)}{\pi}.$$

Из равенства (1.40) и оценок r_1 и r_2 следует справедливость теоремы.

Доказательство теоремы 1.14. Функции из класса W_p^r имеют представление

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_r(x-t)f^{(r)}(t)dt,$$

где $\frac{a_0}{2}-$ коэффициент Фурье функции $f(x)$; $D_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r}\cos(kx - -\frac{\pi}{2}r)-$ функция Бернули.

В статье В.Ф. Бабенко, С.А. Пичугова [7] показано, что наилучший линейный метод приближения функций f из класса W_p^r осуществляется операторами

$$\bar{\mathcal{L}}_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{T}_n(x-t)f^{(r)}(t)dt,$$

где $\tilde{T}_n(x)$ — полином наилучшего приближения функции $D_r(x)$ в метрике L'_p $(1/p + 1/p' = 1)$, причем

$$\sup_{f \in W_p^r(1)} \max_x |f(x) - \bar{\mathcal{L}}_n(f, x)| = \frac{1}{\pi} E_n(D_r)_p.$$

Представим погрешность к.ф. (1.35) в виде

$$R_N(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} (\varphi(\sigma) - \bar{\mathcal{L}}_n(\varphi, \sigma)) \mathrm{ctg} \frac{\sigma - \mathrm{s}}{2} \mathrm{d}\sigma -$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} P_N[\varphi(\sigma) - \bar{\mathcal{L}}_n(\varphi, \sigma)] \mathrm{ctg} \frac{\sigma - \mathrm{s}}{2} \mathrm{d}\sigma = \mathrm{r}_3(\mathrm{s}, \varphi) - \mathrm{r}_4(\mathrm{s}, \varphi).$$

Очевидно,

$$|r_3(s, \varphi)| = \frac{1}{2\pi^2} | \int\limits_0^{2\pi} [\int\limits_0^{2\pi} (D_r(\sigma - t) - \tilde{T}_n(\sigma - t)) f^{(r)}(t) dt] \mathrm{ctg} \frac{\sigma - \mathrm{s}}{2} \mathrm{d}\sigma | =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} | \int\limits_0^{2\pi} f^{(r)}(t) [\int\limits_0^{2\pi} (D_r(\sigma - t) - \tilde{T}_n(\sigma - t)) \mathrm{ctg} \frac{\sigma - \mathrm{s}}{2} \mathrm{d}\sigma] \mathrm{dt} | \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi^2} [\int\limits_0^{2\pi} |f^{(r)}(t)|^p dt]^{1/p} [\int\limits_0^{2\pi} | \int\limits_0^{2\pi} (D_r(\sigma - t) - \tilde{T}_n(\sigma - t)) \mathrm{ctg} \frac{\sigma - \mathrm{s}}{2} \mathrm{d}\sigma |^{\mathrm{p}'} \mathrm{dt}]^{1/\mathrm{p}'} =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} ||f^{(r)}||_p [\int\limits_0^{2\pi} | \int\limits_0^{2\pi} (D_r(\sigma - t) - \tilde{T}_n(\sigma - t)) \mathrm{ctg} \frac{\sigma - \mathrm{s}}{2} \mathrm{d}\sigma |^{\mathrm{p}'} \mathrm{dt}]^{1/\mathrm{p}'}.$$

Известна (см. [9, с. 566]) следующая теорема.

Теорема М. Рисса. Если $\varphi(x) \in L_p$, $p > 1$, то сопряженная функция $\tilde{\varphi}(x) \in L_p$ и $||\tilde{\varphi}||_{L_p} \leq A_p ||\varphi||_{L_p}$, где A_p — константа, зависящая только от p.

П. Штейн [214] показал, что $A_p \leq 2p$ при $p \geq 2$.

Воспользовавшись теоремой М. Рисса и оценкой П. Штейна, имеем

$$|r_3(s, \varphi)| \leq \frac{2}{\pi} p' ||\varphi^{(r)}||_p ||D_r(\sigma) - \tilde{T}_n(\sigma)||_{p'} = \frac{2}{\pi} p' E_n(D_r)_{p'}.$$

Перейдем к рассмотрению выражения r_4. Для получения нужной оценки достаточно повторить рассуждения, приведенные в теореме 1.11 при исследовании интеграла r_2. Положим $y_k = \varphi(s_k) - \bar{\mathcal{L}}_n(\varphi, s_k)$. В результате получим оценку $|r_4(s,\varphi)| \le E_n(D_r)_{p'} \ln n/\pi^2$. Собирая оценки r_3 и r_4, окончательно имеем $R_N[\Psi] \le E_n(D_r)_{p'}(2p' + \pi^{-1}(\ln n +$
$+ C))$. Теорема доказана.

Доказательства следствий

1. Неравенство (1.37) следует из оценки $E_N(D_r)_1 \le \pi K_r N^{-r}$, доказанной в книге Н.П. Корнейчука [92].

2. Неравество (1.38) следует из оценки $E_n(D_{2r})_{C_{2\pi}} = \pi\mu(2r-1)/2(2r-$
$-1)!n^{2r-1} + o(n^{-2r+1})$, доказанной в статье В.Ф. Бабенко, С.А. Пичугова [7].

1.4. Устойчивость алгоритмов

При вычислении сингулярных интегралов $\mathcal{F}\varphi$ по к.ф. вида (1.1), как правило, оказывается, что вместо значений $\varphi(t_k)$ известны их приближенные значения $\tilde{\varphi}(t_k)$ с точностью $|\varphi(t_k) - \tilde{\varphi}(t_k)| \le \varepsilon$. Возникает задача построения оптимальной квадратурной формулы в предположении, что вместо вектора $I_N = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$ точных значений $\varphi(t_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ задан вектор приближенных значений $\tilde{I}_N =$
$= (\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_N)$, где $\tilde{\varphi}_k = \tilde{\varphi}(t_k)$ и $|\varphi_k - \tilde{\varphi}_k| \le \varepsilon$, $k = 1, 2, \ldots, N$.

1.4.1. Формулировки теорем

Теорема 1.15 [29]. Верхняя грань оценки снизу погрешности к.ф. вида (1.1) на классе $H_1(1)$ при задании вектора I_N с погрешностью ε, $\varepsilon > 0$ не меньше величины, равной

$$\frac{\ln \pi}{N} + \frac{|\ln \varepsilon|}{N} + \frac{2\varepsilon}{\pi}(1 + |\ln|\sin\frac{\varepsilon}{2}||).$$

Теорема 1.16 [29]. Пусть $\Psi = H_\alpha(1)$. Квадратурная формула (1.3) при задании вектора I_N с погрешностью ε имеет погрешность

$$R_N[\Psi] \le (1 + o(1))2\ln N/\pi^{1-\alpha}(1+\alpha)N^\alpha + 2\varepsilon(|\ln\sin\pi/N| + \ln 2)/\pi.$$

Теорема 1.17 [29]. Пусть $\Psi = H_\alpha(1)$. Квадратурная формула

$$\mathcal{F}\varphi = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{\Delta_{k-1}} \tilde{\varphi}(t'_{k-1})\mathrm{ctg}\frac{\sigma - \mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma + \mathrm{R_N}(\mathrm{s},\varphi), \qquad (1.41)$$

где $\Delta_{k-1} = [t_{k-1}, t_k] \cap D$, $t_k = 2k\pi/N$, $t'_k = (2k+1)\pi/N$, D – дополнение $[s - t_{k^*}, s + t_{k^*}]$ до $[0, 2\pi]$, $k^* = [N\varepsilon^{1/\alpha}] + 1$, имеет погрешность

$$R_N[\Psi] = 2|\ln|\sin\varepsilon^{1/\alpha}||/\pi^{1-\alpha}(1+\alpha)N^\alpha + 2\varepsilon|\ln|\sin(\pi\varepsilon^{1/\alpha})||/\pi +$$
$$+2(2\pi\varepsilon^{1/\alpha} + 2\pi/N)^\alpha(\pi\varepsilon^{1/\alpha} + \pi/N)/(\pi\alpha|\sin(\pi\varepsilon^{1/\alpha} + \pi/N)|).$$

Замечание. При $\varepsilon = 1/N$ главные члены оценок сверху и снизу совпадают. Различие между этими оценками равно AN^{-1}, причем константа A легко определяется.

При использовании к.ф. (1.3) коэффициенты $p_k(s)$, т.е. функции $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \mathrm{ctg}\frac{\sigma - \mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma$, могут быть вычислены с погрешностью. Исследуем устойчивость к.ф. (1.3) в предположении, что веса $p_k(s)$ вычисляются с точностью ε ($\varepsilon > 0$).

Теорема 1.18 [29]. Пусть $\Psi = H_\alpha(1)$. Верхняя грань оценки снизу погрешности к.ф. (1.3) при неточно заданных весах $p_k(s)$ равна бесконечности.

Теорема 1.19 [29]. Пусть $\Psi = H_\alpha(1)$. Если веса $p_k(s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \mathrm{ctg}\frac{\sigma - \mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma$ вычисляются с точностью ε, то к.ф.

$$\mathcal{F}\varphi = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{\Delta_{k-1}} (\varphi(t'_{k-1}) - \varphi(t'_{v-1}))\mathrm{ctg}\frac{\sigma - \mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma + \mathrm{R_N}(\varphi), \qquad (1.42)$$

где $t_k = 2k\pi/N$, $t'_k = (2k+1)\pi/N$, $s \in [t_{v-1}, t_v]$, $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}] \cap C_{[0,2\pi]\setminus\Delta}$, $C_{[0,2\pi]\setminus\Delta}$ – дополнение сегмента $\Delta = [s - 2\pi/N, s + 2\pi/N]$ до сегмента $[0, 2\pi]$ имеет погрешность $R_N[\Psi] \le (2^{-1}\varepsilon N + 2N^{-\alpha}\ln N)/\pi^{1-\alpha}(1+\alpha)$.

Замечание. Данная оценка достижима.

При вычислении интегралов по формуле (1.3) затруднительно вычислять коэффициенты $p_k(s)$ при каждом значении s. Естественным представляется следующий подход. Пусть $s \in [t_v, t_{v+1}]$. Тогда коэффициент

p_{kv} определяется выражением $p_{kv} = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \mathrm{ctg}\dfrac{\sigma - \mathrm{t}'_{\mathrm{v}}}{2}\mathrm{d}\sigma$ и интеграл $\mathcal{F}\varphi$ вычисляется по формуле

$$\mathcal{F}\varphi = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi(t'_{k-1})\mathrm{ctg}\frac{\sigma - \mathrm{t}'_{\mathrm{v}}}{2}\mathrm{d}\sigma + \mathrm{R_N}(\varphi). \tag{1.43}$$

Теорема 1.20. Пусть $\Psi = H_\alpha(1)$, $0 < \alpha \leq$. Тогда погрешность к.ф. (1.43) оценивается неравенством

$$R_N[\Psi] \leq \frac{2\ln N}{\pi^{1-\alpha}(1+\alpha)N^\alpha} + \frac{2}{\pi^{1-\alpha}N^\alpha}|\ln\sin\frac{\pi}{N}| + \frac{2^{2+\alpha}}{\pi^{1-\alpha}\alpha N^\alpha} + o\left(\frac{1}{N^\alpha}\right).$$

1.4.2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1.15. Для вычисления погрешности к.ф. (1.1) можно поступить следующим образом: возьмем вектор $\tilde{I}_N = (0, \ldots, 0)$ и построим по этому вектору функцию $\varphi^*(t) \in H(1)$, такую, что $|\varphi(t_v) \leq \varepsilon$. Тогда $R_N[\Psi] = \sup\limits_{\varphi \in H_1(1)\ \tilde{I}_N = 0} \max\limits_s \mathcal{F}\varphi^*$.

При этом следует рассмотреть две возможности: 1) существует сегмент длиной $h = [2^3\pi \ln \pi N^{-1} + 2^3\pi |\ln \varepsilon| N^{-1} + 2^4(1 + |\ln|\sin \varepsilon/2||)]$, в котором отсутствуют узлы к.ф. (1.1); 2) в каждом сегменте длиной h имеется, по крайней мере, один узел к.ф. (1.1).

Остановимся вначале на первой возможности. Не ограничивая общности можно считать, что в сегменте $[\varepsilon, \varepsilon + h]$ нет узлов к.ф. (1.1). Введем функцию $\varphi^*(\sigma)$ по формуле

$$\varphi^*(\sigma) = \sigma,\ 0 \leq \sigma \leq \mathrm{a} = \varepsilon; \varepsilon + \min(|\sigma - \mathrm{a}|, |\mathrm{h} + \mathrm{a} - \sigma|),\quad \mathrm{a} \leq \sigma \leq \mathrm{a} + \mathrm{h}; (2\mathrm{a} + \mathrm{h} - \sigma),$$

Подставив функцию $\varphi^*(\sigma)$ в интеграл $\mathcal{F}\varphi$, после несложных, но довольно громозких вычислений, получаем оценку

$$\max_s (\mathcal{F}\varphi^*)(s) \geq h/2\pi.$$

Перейдем ко второй возможности. Разделим сегмент $[0, 2\pi]$ на $M = [2\pi/h]$ равных частей точками $v_k = 2k\pi/M$, $k = 0, 1, \ldots, M$. По предположению в каждом интервале $[v_k, v_{k+1}]$ найдется, по крайней мере, один узел к.ф. (1.1). Выберем в каждом интервале (v_k, v_{k+1}) точно по одному узлу и обозначим выбранный узел через t_k^*, $k = 0, 1, \ldots, M - 1$. Каждому узлу t_j^* поставим в соответствие функцию $\tilde{\varphi}_j^*(\sigma) = \varphi_j^*(\sigma) + (\mathrm{sgn}\ \mathrm{ctg}\frac{\sigma - \mathrm{t_j^*}}{2}) \min(|\sigma - \mathrm{t_j^*} - \mathrm{k}\pi|, \varepsilon)$, где $\varphi_j^*(\sigma)$ определяется следующим образом. Обозначим через ∇_j множество точек $\sigma \in [0, 2\pi]$, которые удовлетворяют неравенству $|\sigma - t_j - k\pi| \leq \varepsilon$. Тогда функцию $\varphi_j^*(\sigma)$ можно положить равной $\min\limits_{0 \leq v \leq N-1} (|\sigma - t_v|, |t_{v+1} - \sigma|) \mathrm{sgnctg}\frac{\sigma - t_j^*}{2}$, если $[t_v, t_{v+1}] \cap \nabla_j -$ пустое множество, и равной нулю при остальных значениях σ.

Оценим снизу значение интеграла

$$(\mathcal{F}\tilde{\varphi}_j^*)(t_j^*) \geq (\mathcal{F}\varphi_j^*)(t_j^*) + \frac{2\varepsilon}{\pi}\left(1 + \ln\left|\sin\frac{\varepsilon}{2}\right|\right).$$

Усредняя это неравенство по всем значениям j аналогично тому, как

это было сделано в п. 1.1.2, имеем

$$\max_{s,j}(\mathcal{F}\tilde{\varphi}_j^*)(s) \geq \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}|\varphi^*(\sigma)|d\sigma\sum_{k=[\varepsilon/h]}^{[M/2]-1}\frac{1}{k+1}+\frac{2\varepsilon}{\pi}\left(1+\ln\left|\sin\frac{\varepsilon}{2}\right|\right)\geq$$

$$\geq\frac{1}{N}\sum_{k=[\varepsilon/h]}^{[M/2]-1}\frac{1}{k+1}+\frac{2\varepsilon}{\pi}\left(1+\ln\left|\sin\frac{\varepsilon}{2}\right|\right)\geq$$

$$\geq\frac{\ln\pi}{N}+\frac{|\ln\varepsilon|}{N}+\frac{2\varepsilon}{\pi}\left(1+\ln\left|\sin\frac{\varepsilon}{2}\right|\right).$$

Здесь $\varphi^*(\sigma)=\min\limits_{1\leq k\leq N}|\sigma-s_k|^\alpha$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.16. Погрешность к.ф. (1.3) может быть представлена выражением

$$|R_N(\varphi)|\leq\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}{}'|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(\varphi(\sigma)-\tilde{\varphi}(t'_{k-1}))\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma|+$$

$$+\frac{1}{2\pi}|\int\limits_{t_{v-2}}^{t_{v+1}}(\varphi(\sigma)-\tilde{\varphi}(t'_{v-1}))\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma|=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2.$$

Из условий теоремы следует, что

$$I_1\leq\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}{}'|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(\varphi(\sigma)-\varphi(t'_{k-1}))\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma|+\frac{2\varepsilon}{\pi}|\ln\sin\frac{\pi}{\mathrm{N}}|\leq$$

$$\leq\frac{(1+o(1))2\ln N}{\pi^{1-\alpha}}(1+\alpha)N^\alpha+\frac{2\varepsilon}{\pi}|\ln\left|\sin\frac{\pi}{N}|\right|.$$

Нетрудно видеть, что

$$I_2\leq\frac{1}{2\pi}[|\int\limits_{t_{v-2}}^{s-t_1}(\varphi(\sigma)-\tilde{\varphi}(t'_{v-1}))\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma|+|\int\limits_{\mathrm{s}-\mathrm{t}_1}^{\mathrm{s}+\mathrm{t}_1}(\varphi(\sigma)-\varphi(\mathrm{s}))\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma|+$$

$$+|\int\limits_{s+t_1}^{t_{v+1}}(\varphi(\sigma)-\tilde{\varphi}(t'_{v-1}))\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma|]\leq\frac{2\varepsilon}{\pi}\ln 2+\pi^{\alpha-1}\frac{1}{\mathrm{N}^\alpha}\left(\frac{2^{1+2\alpha}}{\alpha}+\ln 2\right).$$

Окончательно имеем
$R_N[\Psi] \le (1+o(1))2\ln N/\pi^{1-\alpha}(1+\alpha)N^\alpha + 2\varepsilon(|\ln\sin\pi/N| + \ln 2)/\pi.$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.17. Погрешность к.ф. (1.41) может быть представлена в виде

$$|R_N(\varphi)| \le \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}|\int\limits_{\Delta_{k-1}}(\varphi(\tau)-\tilde{\varphi}(t'_{k-1}))\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma|+$$

$$+\frac{1}{2\pi}|\int\limits_{s-t_{k^*}}^{s+t_{k^*}}(\varphi(\tau)-\varphi(s))\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma| \le$$

$$\le \frac{2|\ln|\sin\varepsilon^{1/\alpha}||}{\pi^{1-\alpha}(1+\alpha)N^\alpha}+\frac{2\varepsilon||\ln|\sin(\pi\varepsilon^{1/\alpha})||}{\pi}+\frac{2(2\pi\varepsilon^{1/\alpha}+2\pi/N)^\alpha(\pi\varepsilon^{1/\alpha}+\pi/N)}{(\pi\alpha|\sin(\pi\varepsilon^{1/\alpha}+\pi/N)|)}.$$

Теорема доказана.

Доказательство замечания. Положим $\varepsilon = 1/N$. Тогда оценка снизу равна $\dfrac{2|\ln\sin 1/N|}{\pi N}+\dfrac{2}{\pi N}+\dfrac{(1+o(1))\ln N}{N}$, а погрешность к.ф. (1.41) ограничена величиной

$$\frac{|\ln\sin 1/N|}{N}+\frac{2|\ln\sin\pi/N|}{\pi N}+\frac{2^3}{N}\cdot\frac{2\pi/N}{\sin(2\pi/N)} \le \frac{\ln N}{N}+$$

$$+\frac{|\ln(1-\pi^2/3!N^2)|}{N}+\frac{2|\ln\sin 1/N|}{\pi N}+\frac{2}{\pi N}+\frac{2^3(2\pi/N)}{N\sin(2\pi/N)}.$$

Из сопоставления оценок снизу и сверху видно, что их главные члены совпадают, а различие равно $o(N^{-1})$.

Доказательство теоремы 1.18. Пусть $\varphi(t) \ge M$ и при некотором значении $s^* \in [t_{v-1}, t_v]$ все коэффициенты $\tilde{p}_k < p_k$ $(k \ne v-2,\dots,v)$. Тогда положив в к.ф. (1.3) $s = s^*$, достаточно повторить рассуждения из п. 1.3 главы 2.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.19. Погрешность к.ф. (1.42) можно

представить в виде

$$|R_N(\varphi)| \le |\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma - \frac{1}{2\pi}\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{N}}\int\limits_{\Delta_{\mathrm{k-1}}}\varphi(\mathrm{t}'_{\mathrm{k-1}})\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma|+$$

$$+|\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}{}'(\varphi(t'_{k-1})-\varphi(v'_{k-1}))\varepsilon_k| = I_1 + I_2,$$

где $\sum'$ означает суммирование по $\Delta_k \ne \emptyset$, $\varepsilon_k = p_k(s) - \bar{p}_k(s)$.

Выражение I_1 было оценено при доказательстве теоремы 1.1. Из условия $\varphi \in H_\alpha(1)$ следует, что $I_2 \le \dfrac{\varepsilon}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{[N/2]}\left(\frac{2k\pi}{N}\right)^\alpha = \frac{(1+o(1))\varepsilon N}{2\pi^{1-\alpha}(1+\alpha)}$.

Теорема доказана.

Доказательство замечания. Справедливость замечания следует из того, что все слагаемые в I_2 можно сделать положительными.

Доказательство теоремы 1.20. Погрешность к.ф. (1.43) может быть представлена выражением

$$|R_N(\varphi)| \le |\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\sigma)(\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2} - \mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{t}'_{\mathrm{v}}}{2})\mathrm{d}\sigma|+$$

$$+|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{t}'_{\mathrm{v}}}{2}\mathrm{d}\sigma - \frac{1}{2\pi}\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{N}}\int\limits_{\mathrm{t_{k-1}}}^{\mathrm{t_k}}\varphi(\mathrm{t}'_{\mathrm{k}})\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{t}'_{\mathrm{v}}}{2}\mathrm{d}\sigma| = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2.$$

Так как $s \in [t_v, t_{v+1}]$, то

$$I_1 = |\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\varphi(\sigma+s-t'_v)-\varphi(\sigma))\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{t}'_{\mathrm{v}}}{2}\mathrm{d}\sigma| \le$$

$$\le |\frac{1}{2\pi}\int\limits_{t'_v-t_1}^{t'_v+t_1}(\varphi(\sigma+s-t'_v)-\varphi(\sigma))\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{t}'_{\mathrm{v}}}{2}\mathrm{d}\sigma|+$$

$$+|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{g_v}(\varphi(\sigma+s-t'_v)-\varphi(\sigma))\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{t}'_{\mathrm{v}}}{2}\mathrm{d}\sigma| = \mathrm{I}_{11} + \mathrm{I}_{12},$$

где $g_v = [t'_v - \pi, t'_v + \pi] \backslash [t'_v - t_1, t'_v + t_1]$.

Из свойств сингулярных интегралов следует, что

$$I_{11} = |\frac{1}{2\pi} \int\limits_{t'_v - t_1}^{t'_v + t_1} ((\varphi(\sigma + s - t'_v) - \varphi(s - t'_v)) - (\varphi(\sigma) - \varphi(t'_v)))\mathrm{ctg}\frac{\sigma - \mathrm{t'_v}}{2}\mathrm{d}\sigma| \leq$$

$$\leq 2^{2+\alpha}/\pi^{1-\alpha}\alpha N^{\alpha},$$

$$I_{12} \leq 2\pi^{\alpha-1}N^{-\alpha}|\ln\sin(\pi/N)|.$$

Величина I_2 была оценена при доказательстве теоремы 1.1. Собирая вместе оценки I_{11}, I_{12}, I_2, имеем

$$|R_N(\varphi)| \leq \frac{2\ln N}{\pi^{1-\alpha}(1+\alpha)N^{\alpha}} + \frac{2}{\pi^{1-\alpha}N^{\alpha}}|\ln\sin\frac{\pi}{N}| + \frac{2^{2+\alpha}}{\pi^{1-\alpha}\alpha N^{\alpha}} + O(N^{-\alpha}).$$

Теорема доказана.

1.5. Математическое ожидание величины погрешности квадратурных формул

1.5.1. Формулировки теорем

При вычислении сингулярных интегралов по к.ф. $S\varphi = S(P_n[\varphi]) + R_n(\varphi)$, исследованной в п. 1.3, естественно предположить, что число $2n+1$ узлов такой формулы случайное. При этом можно ожидать, что математическое ожидание (м.о.) величины погрешности $R_n(\varphi)$ значительно меньше модуля погрешности $|R_n(\varphi)|$.

Теорема 1.21 [29]. Пусть $2N+1 \leq 2n+1 \leq 4N+1$, $\Psi = \mathcal{L}_\alpha(c)$. Тогда математическое ожидание модуля ошибки к.ф.

$$S\varphi = S(P_n[\varphi]) + R_n(\varphi) \tag{1.44}$$

равно $..|\mathrm{R_n}(\varphi)| = \mathrm{O}(\mathrm{N}^{-\alpha-1/2})$.

Из доказательства вытекает следующее утверждение.

Следствие. Пусть α, $(\alpha > 1/2)-$ произвольное число, такое, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n^2(\varphi)n^{2\alpha}\ln^2 n < \infty$. Тогда математическое ожидание модуля ошибки к.ф. (1.44) равно

$$..|\mathrm{R_n}(\varphi)| = \mathrm{O}(\mathrm{N}^{-\alpha-1/2}(\sum_{\mathrm{n=N+1}}^{\infty} \mathrm{E_n^2}(\varphi)\mathrm{n}^{2\alpha}\ln^2\mathrm{n})^{1/2}).$$

Теорема 1.22 [29]. Пусть $2N+1 \leq 2n+1 \leq 4N+1$, $\Psi = \Phi_\alpha(C)$, $\alpha > 1/2$. Тогда математическое ожидание модуля ошибки к.ф. (1.44) равно $..|\mathrm{R_n}(\varphi)| = \mathrm{O}(\mathrm{N}^{-\alpha-1/2}\ln \mathrm{N})$.

1.5.2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1.21. Представим разность $\varphi(s) - P_n[\varphi](s)$ в виде

$$\varphi(s) - P_n[\varphi](s) = \sum_{j=1}^{\infty}(T_{n(j+1)}[\varphi](s) - T_{nj}[\varphi](s)) + T_n[\varphi](s) - P_n[\varphi](s),$$

где $T_{nj}[\varphi](s)-$ полином наилучшего приближения степени nj к функции $\varphi(s)$. Погрешность к.ф. (1.44) можно представить в виде

$$|R_N(\varphi)| \le \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{\infty}(T_{n(j+1)}(\sigma) - T_{nj}(\sigma))\mathrm{ctg}\frac{\sigma - \mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(T_n(\sigma) - P_n(\sigma))\mathrm{ctg}\frac{\sigma - \mathrm{s}}{2}\mathrm{d}\sigma\right| \le A\sum_{j=1}^{\infty}E_{nj}(\varphi)\ln nj.$$

Предположим вначале, что $\alpha > 1$. Тогда, следуя рассуждениям, приведенным в статье Н.С. Бахвалова [12], имеем

$$|R_N(\varphi)|^2 \le An^{-2\alpha}(\sum_{j=1}^{\infty}E_{nj}(\varphi)(\ln nj)(nj)^{\alpha}j^{-\alpha})^2 =$$

$$= An^{-2\alpha}(\sum_{j=1}^{\infty}E_{nj}(\varphi)j^{-1/2}(\ln nj)(nj)^{\alpha}j^{1/2-\alpha})^2 \le$$

$$\le An^{-2\alpha}\zeta(2\alpha-1)\sum_{j=1}^{\infty}E_{nj}^2(\varphi)(nj)^{2\alpha}(\ln^2 nj)j^{-1},$$

и

$$\frac{1}{N}\sum_{n=N+1}^{2N}n^{2\alpha}(R_n(\varphi))^2 \le A\zeta(2\alpha-1)\frac{1}{N}\sum_{n=N+1}^{2N}\sum_{j=1}^{\infty}E_{nj}^2(\varphi)(nj)^{2\alpha}(\ln^2 nj)\frac{1}{j} \le$$

$$\le A\zeta(2\alpha-1)\frac{1}{N}\sum_{k=N+1}^{\infty}E_k^2(\varphi)k^{2\alpha}(\ln^2 k)\tau_{N+1}^{2N}(k)(k/2N)^{-1} \le$$

$$\le A\zeta(2\alpha-1)\frac{1}{N}\sum_{n=N+1}^{\infty}E_k^2k^{2\alpha}(\ln^2 k)(3k/2N)(k/2N)^{-1} \le 3AC\zeta(2\alpha-1)\frac{1}{N}.$$

Здесь $\tau_{N+1}^{2N}(k)$ – число делителей m числа k, заключенных в пределах $N+1 \le k \le 2N$, $\zeta(\alpha)$– дзета-функция Римана.

Как показано Н.С. Бахваловым [12], последнее неравенство означает, что если значения n в пределах $N \le n \le 2N$ равновероятные, то при целом r $(r = Nq, q < 1)$ с вероятностью $1 - q = (N - r)N^{-1}$ справедлива оценка м.о. $|R_n(\varphi)| \le q^{-1/2} n^{-\alpha-1/2} \sqrt{6AC\zeta(2\alpha - 1)}$.

Пусть теперь $1/2 < \alpha \le 1$. Тогда

$$.\mathrm{o.}\,|\mathrm{R_n}(\varphi)| = \mathrm{N}^{-1} \sum_{\mathrm{n=N+1}}^{\mathrm{2N}} |\mathrm{R_n}(\varphi)| \le \mathrm{AN}^{-1} \sum_{\mathrm{n=N+1}}^{\mathrm{2N}} \sum_{\mathrm{j=1}}^{\infty} \mathrm{E_{nj}}(\varphi) \ln \mathrm{nj} \le$$

$$\le AN^{-1} \sum_{j=N+1}^{\infty} E_j(\varphi)(\ln j)\tau_{N+1}^{2N}(j) \le$$

$$\le AN^{-1}[\sum_{j=N+1}^{\infty} E_j^2(\varphi)(\ln^2 j) j^{2\alpha}]^{1/2}[\sum_{j=N+1}^{\infty} (\tau_{N+1}^{2N}(j))^2 j^{-2\alpha}]^{1/2}.$$

Пользуясь неравенством

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} (\tau_{N+1}^{2N}(j))^2 j^{-2\alpha} \le N^{-2\alpha}(\sum_{k=2}^{\infty} C_1 N k^{C_2/(\ln\ln k+1)} k^{-2\alpha}), \tag{1.45}$$

приведенным в статье [12], получаем оценку м.о. $|R_n(\varphi)| = O(N^{-\alpha-1/2})$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.22. Возвращаясь ко второй части доказательства теоремы 1.19, видим, что

$$|R_n(\varphi)| = N^{-1} \sum_{n=N+1}^{2N} |R_n(\varphi)| \le AN^{-1} \sum_{n=N+1}^{2N} \sum_{j=1}^{\infty} E_{nj}(\varphi) \ln nj \le$$

$$\le AN^{-1} \sum_{j=N+1}^{\infty} E_j(\varphi)(\ln j)\tau_{N+1}^{2N}(j) \le$$

$$\le AN^{-1}[\sum_{j=N+1}^{\infty} E_j^2(\varphi) j^{2\alpha}]^{1/2}[\sum_{j=N+1}^{\infty} (\tau_{N+1}^{2N}(j))^2 j^{-2\alpha}(\ln^2 j)]^{1/2}.$$

Вновь возвращаясь к неравенству (1.45), находим, что

$$\sum_{j=N+1}^{\infty}(\tau_{N+1}^{2N}(j))^2 j^{-2\alpha}(\ln^2 j) \le \sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{j=kN+1}^{(k+1)N}(\tau_{N+1}^{2N}(j))^2 j^{-2\alpha}(\ln^2 j) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty}(kN+1)^{-2\alpha}\ln^2(k+1)N\sum_{j=kN+1}^{(k+1)N}(\tau_{N+1}^{2N}(j))^2 \le$$

$$\le C_1 N^{-2\alpha+1}\sum_{k=2}^{\infty}k^{-2\alpha}(\ln^2 k + 2\ln k\ln N + \ln^2 N)k^{C_2/(\ln\ln k+1)} =$$

$$= C_1 N^{-2\alpha+1}\sum_{k=2}^{\infty}k^{-2\alpha}+$$

$$+\frac{C_1}{N^{2\alpha-1}}\ln N\sum_{k=2}^{\infty}k^{-2\alpha+C_2/(\ln\ln k+1)}\ln k+$$

$$+\frac{C_1}{N^{2\alpha-1}}\ln^2 N\sum_{k=2}^{\infty}k^{-2\alpha+C_2/(\ln\ln k+1)}.$$

Ряды, стоящие в правой части последнего неравенства, сходятся. Поэтому м.о. $|R_n(\varphi)| = O(N^{-\alpha-1/2}\ln N)$.

Теорема доказана.

2. Класс $\mathbf{W_p^r}$

2.1. Асимптотически оптимальные пассивные алгоритмы

2.1.1. Формулировки теорем

Рассмотрим сингулярный интеграл с ядром Гильберта

$$S\varphi = \int_0^1 \varphi(\sigma)\mathrm{ctg}\pi(\sigma - \mathrm{s})\mathrm{d}\sigma, \tag{2.1}$$

который будем вычислять по квадратурной формуле

$$S\varphi = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=0}^{\rho}p_{kl}(s)\varphi^{(l)}(x_k) + R_N(s, s_k, p_k(s), \varphi) \tag{2.2}$$

и сингулярный интеграл с ядром Коши

$$T\varphi = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t},\ t \in (-1,1), \tag{2.3}$$

который будем вычислять по квадратурной формуле вида

$$T\varphi = \sum_{k=-N}^{N} \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl}(t)\varphi^{(l)}(t_k) + R_N(t, t_k, p_{kl}(t), \varphi), \tag{2.4}$$

где $-1 \le t_{-N} < \dots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \dots < t_N \le 1$.

Теорема 2.1 [29]. Пусть $\Psi = \tilde{W}^r L_p(1)$ $(1 \le p \le \infty)$ и интеграл (2.1) вычисляется по к.ф. вида (2.2) при $\rho = r - 1$ $(r = 1, 2, 3, \dots)$ и при $\rho = r - 2$ $(r = 2, 4, 6, \dots)$.
Тогда $\zeta_N[\Psi] \ge (1 + o(1))2R_{rq}(1)\ln N/\pi r!(2N)^r \sqrt[q]{rq+1}$.

Теорема 2.2 [29]. Пусть $\Psi = \tilde{W}^r(1)$ $(r \ge 3)$. Тогда среди всевозможных к.ф. вида (2.2) при $s \in [t_j, t_{j+1})$, $t_k = k/N$, $k = 0, 1, \dots, N$ асимптотически оптимальной является формула

$$S\varphi = \int\limits_{t_{j-2}}^{t_{j+2}} \tilde{\varphi}(\sigma, [t_{j-2}, t_{j+2}])\mathrm{ctg}\pi(\sigma - \mathrm{s})\mathrm{d}\sigma +$$

$$+ \sum_{k \ne j-2,\dots,j+1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \tilde{\varphi}(\sigma, [t_k, t_{k+1}])\mathrm{ctg}\pi(\sigma - \mathrm{s})\mathrm{d}\sigma + \mathrm{R_N}(\mathrm{s}, \mathrm{s_k}, \mathrm{p_k}(\mathrm{s}), \varphi), \tag{2.5}$$

где $\tilde{\varphi}(\sigma, [t_k, t_{k+1}])$ – полином, введенный в разд. 1 гл. 2. Ее погрешность равна

$$R_N[\Psi] \le (1 + o(1))2R_{r1}(1)\ln N/\pi(r+1)!(2N)^r.$$

Теорема 2.3 [36]. Пусть $\Psi = W^r L_p(1)$ и интеграл $T\varphi$ вычисляется по к.ф. (2.4). Тогда

$$\zeta_N[\Psi] \ge (1 + o(1))2^{r+1+1/q} N^{-r} \ln N \inf_c \|B_r^*(\cdot) - c\|_{L_q[0,1]},$$

при $\rho = 0$;

$$\zeta_N[\Psi] \ge 2(1 + o(1))R_{rq}(1)\ln N/2^r r! \sqrt[q]{rq+1}\big[N - 1 + [R_{rq}(1)]^{1/r}\big]^r,$$

при $\rho = r-1$ $(r=1,2,\ldots)$, $\rho = r-2$ $(r=2,4,\ldots)$.

Теорема 2.4 [36]. Пусть $\Psi = W^r(1)$. Среди к.ф. вида (2.4) при $\rho = r-1$ $(r=1,2,\ldots)$ формула

$$T\varphi = \int\limits_{t_{j-2}}^{t_{j+2}} \frac{\tilde{\varphi}(\tau,[t_{j-2},t_{j+2}])}{\tau - t} d\tau + \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq j-2,\ldots,j+1}}^{N-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\tilde{\varphi}(\tau,[t_k,t_{k+1}])}{\tau - t} d\tau + R_N(\varphi),$$

где $t \in [t_j, t_{j+1})$, $2 \le j \le N-2$, $t_k = -1 + 2k/N$, является асимптотически оптимальной. Ее погрешность равна

$$R_N[\Psi] = R_{r1}(1)\Big[\ln[(N-j-1)(j-1)]\Big]/(r+1)!(2N)^r + O(N^{-r}).$$

Рассмотрим интеграл

$$H\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2} d\sigma,$$

который будем вычислять по квадратурным формулам вида

$$H\varphi = \sum_{k=0}^{N} p_k(s)\varphi(s_k) + R_N(s, s_k, p_k, \varphi). \tag{2.6}$$

.

Введем обозначения $M = [\ln^{1/2r} N]$, $L = [N/M]$, $v_k = 2k\pi/L$, $k = 0,1,\ldots,L$. Знак $\sum'$ означает суммирование по $k \neq j-1, j, j+1$. **Теорема 2.5** [36]. Среди к.ф. вида (2.6) при $\rho = 0$ асимптотически оптимальной на классе $\Psi = W^r(1)$ является при $s \in [v_j, v_{j+1})$ формула

$$H\varphi = \frac{1}{2\pi}\Big[l_{M,r,\infty}\big[\varphi;[v_{j-1},v_j]\big] + l_{M,r,\infty}\big[\varphi;[v_j,v_{j+1}]\big] +$$

$$+ l_{M,r,\infty}\big[\varphi;[v_{j+1},v_{j+2}]\big]\Big]\operatorname{ctg}\frac{v_{j-1}-s}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{L-1}{}'\operatorname{ctg}\frac{v_k - s}{2} l_{M,r,\infty}\big[\varphi;[v_k,v_{k+1}]\big] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{v_{j-1}}^{v_{j+2}} \Pi_{N^2,r,\infty}\big[T_{r-1}[\varphi(v_{j-1})]\big]\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2} d\sigma +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{L-1}{}' \int\limits_{v_k}^{v_{k+1}} \Pi_{N^2,r,\infty}\big[T_{r-1}[\varphi(v_k)]\big]\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma + R_N(\varphi),$$

имеющая погрешность $R_N[\Psi] = (1+o(1))2K_r\pi^{-1}N^{-r}\ln N$.

Введем обозначения $M = [\ln^{1/2r} N]$, $L = [N/M]$, $v_k = 2k\pi/L$, $k = 0, 1, \ldots, L$. Знак $\sum'$ означает суммирование по $k \neq j-1, j, j+1$.

Теорема 2.6 [36]. Среди к.ф. вида (2.4) асимптотически оптимальной на классе $\Psi = W^r(1)$ является при $t \in [v_j, v_{j+1})$ формула

$$T\varphi = \frac{1}{v_{j-1}-t}\Big[l_{M,r,\infty}\big[\varphi;[v_{j-1},v_j]\big] + l_{M,r,\infty}\big[\varphi;[v_j,v_{j+1}]\big]+$$

$$+l_{M,r,\infty}\big[\varphi;[v_{j+1},v_{j+2}]\big]\Big] + \sum_{k=0}^{L-1}{}'\frac{1}{v_k-t}l_{M,r,\infty}\big[\varphi;[v_k,v_{k+1}]\big]+$$

$$+\int\limits_{v_{j-1}}^{v_{j+2}} \Pi_{N^2,r,\infty}\big[T_{r-1}[\varphi(v_{j-1})]\big]\frac{d\tau}{\tau-t}+$$

$$+\sum_{k=0}^{L-1}{}'\int\limits_{v_k}^{v_{k+1}} \Pi_{N^2,r,\infty}\big[T_{r-1}[\varphi(v_k)]\big]\frac{d\tau}{\tau-t} + R_N(\varphi),$$

имеющая погрешность

$$R_N[\Psi] = (1+o(1))2^{r+2}N^{-r}\ln N \inf_c \|B_r^*(\cdot)-c\|_{L_q[0,1]}.$$

2.1.2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 2.1. Оценим снизу погрешность к.ф. (2.2) на классе $\Psi = \tilde{W}^r L_p(1)$ $(1 \le p \le \infty)$ при $\rho = r-1$ $(r = 1, 2, \ldots)$. При исследовании погрешности могут возникнуть два случая 1) найдется сегмент $h = (2R_{rq}(1)\ln N/A_r(r-1)!\sqrt[q]{rq+1})^{1/r})N^{-1}$, в котором нет узлов к.ф. (2.2); 2) в любом сегменте длины h найдется, по крайней мере, один узел к.ф. (2.2).

Остановимся на первой возможности. Не ограничивая общности можно считать, что в сегменте $[0,h]$ отсутствуют узлы к.ф. (2.2).

Определим в сегменте $[0,h]$ функцию $\varphi^*(\sigma)$ формулой

$$\varphi^*(\sigma) = \sigma^r(h-\sigma)^r A_r\left(\frac{2}{h}\right)^r, \quad 0 \le \sigma \le \mathrm{h}; 0, \ \mathrm{h} \le \sigma \le 1.$$

Константа A_r выбирается таким образом, чтобы $\varphi^*(\sigma) \in \tilde{W}^r L_p(1)$ $(1 \leq p \leq \infty)$. Нетрудно видеть, что такая константа существует. Оценим теперь интеграл

$$(S\varphi^*)(0) = \int\limits_0^h \varphi^*(\sigma)\mathrm{ctg}\pi\sigma\mathrm{d}\sigma \sim \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\mathrm{h}} \frac{\varphi^*(\sigma)}{\sigma}\mathrm{d}\sigma \geq \frac{4\mathrm{A_r}}{\pi(\mathrm{r}+1)}\left(\frac{\mathrm{h}}{2}\right)^{\mathrm{r}} =$$

$$= 2R_{rq}(1)\ln N/\pi r!(2N)^r \sqrt[q]{rq+1}.$$

Рассмотрим вторую возможность. Разобьем сегмент $[0,1]$ на M частей точками $v_j = j/M$, $j = 0, 1, \ldots, M$, где $M = [1/h]$. Так как длина каждого из участков разбиения не меньше h, то в каждом из них найдется, по крайней мере, по одному узлу к.ф. (2.2). Выберем на каждом из участков $[v_j, v_{j+1}]$ разбиения точно по одному узлу к.ф. (2.2) и обозначим эти узлы через x_j^* $(j = 1, 2, \ldots, M)$. Обозначим через $\varphi^*(\sigma)$ функцию, принадлежащую классу $\tilde{W}^r L_p(1)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ и удовлетворяющую условию $\varphi^{*(l)}(x_k) = 0$ при $k = 1, 2, \ldots, N$,
$l = 0, 1, \ldots, r-1$ и имеющую норму $||\varphi^{*(r)}|| \leq 1$. Класс этих функций обозначим через $\tilde{W}^r L_p(x_1, \ldots, x_N)$.

Возьмем точку x_j^* и введем функцию

$$\varphi_j^*(\sigma) = 0 \quad \sigma \in [\mathrm{x}_{\mathrm{j}-2}^*, \mathrm{x}_{\mathrm{j}+2}^*], 0 \quad \sigma \in [\mathrm{x}_{\mathrm{v}}^*, \mathrm{x}_{\mathrm{v}+1}^*], \varphi^*(\sigma) \quad \sigma \in [\mathrm{x}_{\mathrm{j}+2}^*, \mathrm{x}_{\mathrm{v}}^*], -\varphi^*(\sigma) \quad \sigma \in [\mathrm{x}_{\mathrm{v}+1}^*, \mathrm{x}_{\mathrm{j}-}^*$$

Здесь через $[x_v^*, x_{v+1}^*]$ обозначим сегмент, в котором находится точка $x_j^* + \dfrac{1}{2}$. Напомним, что сегмент $[0,1]$ считается закольцованным, т.е. точки 0 и 1 отождествляются.

Рассмотрим теперь интеграл $(S\varphi_j^*)(x_j^*)$ при некотором значении $j = 1, 2, \ldots, M$. Нетрудно видеть, что

$$(S\varphi_j^*)(x_j^*) = \int\limits_{x_j^*-\frac{1}{2}}^{x_j^*+\frac{1}{2}} \varphi_j^*(\sigma)\mathrm{ctg}\pi(\sigma - \mathrm{x_j^*})\mathrm{d}\sigma = \sum_{\mathrm{k}=2}^{[\frac{\mathrm{M}}{2}]-1} [\int\limits_{\mathrm{x_{j+k}^*}}^{\mathrm{x_{j+k+1}^*}} \varphi_{\mathrm{j}}^*(\sigma)\mathrm{ctg}\pi(\sigma - \mathrm{x_j^*})\mathrm{d}\sigma +$$

$$+ \int\limits_{x_{j-k-1}^*}^{x_{j-k}^*} \varphi_j^*(\sigma)\mathrm{ctg}\pi(\sigma - \mathrm{x_j^*})\mathrm{d}\sigma] \geq \sum_{\mathrm{k}=2}^{[\frac{\mathrm{M}}{2}]-1} [\frac{\mathrm{M}}{\pi(\mathrm{k}+1)} \int\limits_{\mathrm{x_{j+k}^*}}^{\mathrm{x_{j+k+1}^*}} \varphi_{\mathrm{j}}^{*+}(\sigma)\mathrm{d}\sigma +$$

$$+\frac{M}{\pi k}\int\limits_{x^*_{j+k}}^{x^*_{j+k+1}}\varphi_j^{*-}(\sigma)d\sigma+\frac{M}{\pi(k+1)}\int\limits_{x^*_{j-k-1}}^{x^*_{j-k}}\varphi_j^{*+}(\sigma)d\sigma+\frac{M}{\pi k}\int\limits_{x^*_{j-k-1}}^{x^*_{j-k}}\varphi_j^{*-}(\sigma)d\sigma],$$

где $\varphi^+=(\varphi+|\varphi|)/2$, $\varphi^-=(\varphi-|\varphi|)/2$.

Так как это неравенство справедливо для любого $j=1,2,\ldots,M$, то

$$\max_{s,j}(S\varphi_j^*)(s)\geq\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}(S\varphi_j^*)(x_j^*)\geq\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}[\sum_{k=2}^{[\frac{M}{2}]-1}[\frac{M}{\pi(k+1)}\int\limits_{x^*_{j+k}}^{x^*_{j+k+1}}\varphi_j^{*+}(\sigma)d\sigma+$$

$$+\frac{M}{\pi k}\int\limits_{x^*_{j+k}}^{x^*_{j+k+1}}\varphi_j^{*-}(\sigma)d\sigma+\frac{M}{\pi(k+1)}\int\limits_{x^*_{j-k-1}}^{x^*_{j-k}}\varphi_j^{*+}(\sigma)d\sigma+\frac{M}{\pi k}\int\limits_{x^*_{j-k-1}}^{x^*_{j-k}}\varphi_j^{*-}(\sigma)d\sigma]]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{[\frac{M}{2}]-1}\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{M}[\int\limits_{x^*_{j+k}}^{x^*_{j+k+1}}\varphi_j^{*+}(\sigma)d\sigma+\int\limits_{x^*_{j-k-1}}^{x^*_{j-k}}\varphi_j^{*+}(\sigma)d\sigma]+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{[\frac{M}{2}]-1}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{M}[\int\limits_{x^*_{j+k}}^{x^*_{j+k+1}}\varphi_j^{*-}(\sigma)d\sigma+\int\limits_{x^*_{j-k-1}}^{x^*_{j-k}}\varphi_j^{*-}(\sigma)d\sigma]=$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{[\frac{M}{2}]-1}[\frac{1}{k+1}\int\limits_0^1\varphi^{*+}(\sigma)d\sigma+\frac{1}{k}\int\limits_0^1\varphi^{*-}(\sigma)d\sigma]\sim$$

$$\sim\frac{2}{\pi}(\ln M)\int\limits_0^1\varphi^*(\sigma)d\sigma\sim\frac{2}{\pi}\ln N\int\limits_0^1\varphi^*(\sigma)d\sigma.$$

Известно (см. теорему 3.23 главы 1), что наилучшая оценка погрешности всевозможных к.ф. вида

$$\int\limits_0^1\varphi(\sigma)d\sigma=\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=0}^{r-1}p_{kl}\varphi^{(l)}(x_k)+R_N(x_k,p_{kq},\varphi)$$

на классе функций $\tilde{W}^rL_p(1)$ $(1\leq p\leq\infty)$ равна

$$R_N[\tilde{W}^rL_p(1)]=R_{rq}(1)/r!(2N)^r\sqrt[q]{rq+1}.$$

Из леммы С.А. Смоляка следует, что

$$\sup_{\varphi\in\tilde{W}^r L_p(x_1,\dots,x_N)} \int\limits_0^1 \varphi(\sigma)d\sigma = \frac{R_{rq}(1)}{r!(2N)^r \sqrt[q]{rq+1}}.$$

Поэтому

$$\max_{s,j}(S\varphi_j)(s) \geq 2(1+o(1))R_{rq}(1)\ln N/r!(2N)^r \sqrt[q]{rq+1}.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.2. Погрешность $R_N(\varphi)$ к.ф. (2.5) может быть представлена в виде

$$|R_N(s,t_k,p_k,\varphi)| \leq |\int\limits_{t_{j-2}}^{t_{j+2}} v(\sigma,[t_{j-2},t_{j+2})\mathrm{ctg}\pi(\sigma-s)d\sigma|+$$

$$+\sum_{k=2}^{[\frac{N}{2}]-1} |\int\limits_{t_{j+k}}^{t_{j+k+1}} v(\sigma,[t_{k+j},t_{k+j+1}])\mathrm{ctg}\pi(\sigma-s)d\sigma|+$$

$$+\sum_{k=2}^{[\frac{N}{2}]-1} |\int\limits_{t_{j-k-1}}^{t_{j-k}} v(\sigma,[t_{j-k-1},t_{j-k}])\mathrm{ctg}\pi(\sigma-s)d\sigma|, \qquad (2.7)$$

где $v(\sigma,[t_k,t_{k+1}]) = \varphi(\sigma) - \tilde{\varphi}(\sigma,[t_k,t_{k+1}])$ при $t_k \leq \sigma \leq t_{k+1}$.

Оценим в отдельности каждое слагаемое, стоящее в правой части неравенства (2.7). Обозначим через h величину $\min((\mathrm{t_{j+2}}-\mathrm{s}),(\mathrm{s}-\mathrm{t_{j-2}}))$. Тогда, полагая для определенности $h = t_{j+2}-s$, имеем

$$|\int\limits_{t_{j-2}}^{t_{j+2}} v(\sigma,[t_{j-2},t_{j+2}])\mathrm{ctg}\pi(\sigma-s)d\sigma| \leq |\int\limits_{t_{j-2}}^{s-h} v(\sigma,[t_{j-2},t_{j+2}])\mathrm{ctg}\pi(\sigma-s)d\sigma|+$$

$$+|\int\limits_{s-h}^{s+h} v(\sigma,[t_{j-2},t_{j+2}])\mathrm{ctg}\pi(\sigma-s)d\sigma|. \qquad (2.8)$$

Очевидно,

$$|\int\limits_{t_{j-2}}^{s-h} v(\sigma,[t_{j-2},t_{j+2}])\mathrm{ctg}\pi(\sigma-s)d\sigma| \le \frac{\pi}{N}\int\limits_{t_{j-2}}^{s-h} v(\sigma,[t_{j-2},t_{j+2}])d\sigma \le$$

$$\le (\pi(r+1)!N^r)^{-1}. \tag{2.9}$$

Далее

$$|\int\limits_{s-h}^{s+h} v(\sigma,[t_{j-2},t_{j+2}])\mathrm{ctg}\pi(\sigma-s)d\sigma| =$$

$$= |\int\limits_{s-h}^{s+h} (v(\sigma,[t_{j-2},t_{j+2}]) - v(s,[t_{j-2},t_{j+2}]))\mathrm{ctg}\pi(\sigma-s)d\sigma| \le$$

$$\le 2|\int\limits_{s}^{s+h} (v(\sigma,[t_{j-2},t_{j+2}]) - v(s,[t_{j-2},t_{j+2}]))\mathrm{ctg}\pi(\sigma-s)d\sigma| =$$

$$= 2|\int\limits_{s}^{s+h} v'(s+\theta(\sigma-s),[t_{j-2},t_{j+2}])(\sigma-s)\mathrm{ctg}\pi(\sigma-s)d\sigma|. \tag{2.10}$$

Оценим $v'(x,[t_{j-2},t_{j+2}])$, $s \le x \le s+h$. Функцию $v(x,[t_{j-2},t_{j+2}])$ можно представить в виде $v(x,[t_{j-2},t_{j+2}]) = \varphi(x) - \tilde{\varphi}(x,[t_{j-2},t_{j+2}])$, где $\tilde{\varphi}(x,[t_{j-2},t_{j+2}])-$ полином степени не выше r. Найдем $\max\limits_x |v'(x,[t_{j-2},t_{j+2})|$. Для этого, пользуясь известной схемой С.Н. Бернштейна (см. [112]), представим разность

$$\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x,[t_{j-2},t_{j+2}]) = \sum_{j=1}^{\infty}[T_{2^jr}(x) - T_{2^{j-1}r}(x)],$$

где T_{2^jr} при $j \ne 0-$ полином наилучшего приближения степени 2^jr функции $\varphi(x)$, а $T_r = \tilde{\varphi}(x,[t_{j-2},t_{j+2}])$.

Воспользовавшись теоремой Д. Джексона, имеем оценку $|T_{2^jr}(x) - T_{2^{j-1}r}(x)| \le |T_{2^jr}(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - T_{2^{j-1}r}(x)| \le A(N2^{j-1}r)^{-r}$ при $j \ne 1$. Здесь A – абсолютная константа. При $j=1$ $|T_{2r}(x) - T_r(x)| \le |T_{2r}(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - T_r(x)| \le A(2rN)^{-r} + (r!N^r)^{-1} =$

$= A_1(Nr)^{-r}$. Таким образом, при любых значениях j $|T_{2^j r}(x) - T_{2^{j-1}r}(x)| \leq$

$\leq A(N2^{j-1}r)^{-r}$.

Воспользовавшись неравенством А.А. Маркова, производную разности оцениваем неравенством $|(T_{2^j r}(x) - T_{2^{j-1}r}(x))'| \leq A/N^{r-1}(2^{j-1}r)^{r-2}$. При $r \geq 3$ ряд, составленный из производных, сходится равномерно и, следовательно,

$$|\varphi'(x) - \tilde{\varphi}_0'(x, [t_{j-2}, t_{j+2}])| \leq \frac{A}{N^{r-1}r^{r-2}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{j-1})^{r-2}} \leq \frac{A}{N^{r-1}}.$$

Подставляя это значение в неравенство (2.10), имеем

$$|\int_{s-h}^{s+h} v(\sigma, [t_{j-2}, t_{j+2}]) \mathrm{ctg}\pi(\sigma - s) d\sigma| \leq AN^{-r}. \tag{2.11}$$

Перейдем теперь к сумме

$$\sum_{k=2}^{[\frac{N}{2}]-1} \int_{t_{j+k}}^{t_{j+k+1}} v(\sigma, [t_{j+k}, t_{j+k+1}]) \mathrm{ctg}\pi(\sigma - s) d\sigma \leq$$

$$\leq \sum_{k=2}^{[\frac{N}{2}]-1} \frac{N}{\pi k} \int_{t_{j+k}}^{t_{j+k+1}} v(\sigma, [t_{j+k}, t_{j+k+1}]) d\sigma.$$

В гл. 2 показано, что $\int_{t_{j+k}}^{t_{j+k+1}} v(\sigma, [t_{j+k}, t_{j+k+1}]) d\sigma \leq \left(\frac{1}{2N}\right)^{r+1} \frac{2R_{r1}(1)}{(r+1)!}$.

Поэтому

$$\sum_{k=2}^{[\frac{N}{2}]-1} \frac{N}{\pi k} \int_{t_{j+k}}^{t_{j+k+1}} v(\sigma, [t_{j+k}, t_{j+k+1}]) d\sigma \leq \frac{1}{(2N)^r} \frac{R_{r1}(1)}{(r+1)!\pi} \ln \frac{N}{2} \sim$$

$$\sim R_{r1}(1) \ln N/(2N)^r (r+1)!\pi. \tag{2.12}$$

Собирая вместе оценки (2.7) – (2.12), окончательно имеем

$$R_N[\Psi] \leq (1 + o(1)) 2R_{r1}(1) \ln N/(2N)^r (r+1)!\pi.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.3 проводится по аналогии с доказательством теоремы 1.10 при $\rho = 0$ и $p = \infty$ и по аналогии с доказательством теоремы 2.1 при $\rho = r - 1$ и $1 \le p \le \infty$.

Для определенности остановимся на втором случае. Оценим снизу величину $\zeta_N[\Psi]$. Введем точки $\zeta_k = -1 + 2k/L,\ k = 0, 1, \ldots, L$. Обозначим через $\{v_k\},\ k = 1, 2, \ldots, M,\ M \le 2N + L + 1$, множество, объединяющее узлы к.ф. (2.4) и $\zeta_j,\ j = 1, 2, \ldots, L$. Через $\varphi^*(t)$ обозначим функцию, принадлежащую $W^r L_p(1)$ и обращающуюся в нуль вместе со своими производными до $r - 1$ порядка в узлах $v_k,\ k = 1, 2, \ldots, M$. Каждой точке ζ_k поставим в соответствие функцию $\psi_k^*(t) = \varphi^*(t)\mathrm{sgn}(\mathrm{t} - \zeta_\mathrm{k})$. Имеем

$$\zeta_N[\Psi] \ge \sum_{j=0}^{L-1} \sum_{k=2}^{L-1-j} \frac{1}{k+1} \int\limits_{\zeta_{k+j}}^{\zeta_{k+j+1}} \varphi^*(\tau)d\tau + \sum_{j=0}^{L-1} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k+1} \int\limits_{\zeta_{j-k-1}}^{\zeta_{j-k}} \varphi^*(\tau)d\tau - I =$$

$$= I_1 - I,$$

$$I = \sum_{j=0}^{L-1} \sum_{k=2}^{L-1-j} \frac{1}{k(k+1)} \int\limits_{\zeta_{k+j}}^{\zeta_{k+j+1}} |\varphi^*(\tau)|d\tau + \sum_{j=0}^{L-1} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k(k+1)} \int\limits_{\zeta_{j-k-1}}^{\zeta_{j-k}} |\varphi^*(\tau)|d\tau.$$

Можно показать, что

$$I = O\left(L^{-r-1} \ln L\right) = o(N^{-r});$$

$$I_1 \ge \sum_{k=2}^{L-1} \frac{1}{k+1} \left[\int\limits_{\zeta_k}^{1} \varphi^*(\tau)d\tau + \int\limits_{-1}^{\zeta_{L-k-1}} \varphi^*(\tau)d\tau \right] \ge$$

$$\ge \sum_{k=2}^{[L-1]/M} \frac{2}{k+1} \left[\int\limits_{-1}^{1} \varphi^*(\tau)d\tau \right] -$$

$$- \sum_{k=2}^{[L-1]/M} \frac{1}{k+1} \left[\int\limits_{-1}^{\zeta_k} \varphi^*(\tau)d\tau + \int\limits_{\zeta_{L-k-1}}^{1} \varphi^*(\tau)d\tau \right] = I_2 - I_3.$$

Величина I_2 неоднократно оценивалась выше. Поэтому остановимся на оценке I_3 :

$$I_3 \le \sum_{k=2}^{[L-1]/M} \frac{1}{k+1} \left[\sum_{l=0}^{k} \int\limits_{\zeta_l}^{\zeta_{l+1}} \varphi^*(v)dv + \sum_{l=L-k}^{L-1} \int\limits_{\zeta_l}^{\zeta_{l+1}} \varphi^*(v)dv \right] \le$$

$$\le \sum_{k=2}^{[L-1]/M} \frac{1}{M^r(k+1)} \left[\sum_{l=0}^{k} \frac{1}{(r+1)!} \left(\frac{2}{L}\right)^{r+1} + \sum_{l=L-k}^{L-1} \frac{1}{(r+1)!} \left(\frac{2}{L}\right)^{r+1} \right] \le$$

$$\le O\left(\frac{1}{M^r L^r}\right) = o\left(\frac{\ln N}{N^r}\right).$$

Следовательно,

$$\zeta_N[\Psi] \ge [1+o(1)] \sum_{k=2}^{[L-1]/M} \frac{2}{k+1} \int\limits_{-1}^{1} \varphi^*(\tau)d\tau \ge 2[1+o(1)] \ln L \int\limits_{-1}^{1} \varphi^*(\tau)d\tau \ge$$

$$\ge 2[1+o(1)]R_{rq}(1)/2^r r! \sqrt[q]{rq+1}[N-1+[R_{rq}(1)]^{1/r}]^r \ln N.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.4 проводится по аналогии с доказательством теоремы 2.2.

Доказательство теоремы 2.5 является объединением доказательств теорем 2.2 и теоремы 2.6 из главы 1.

Доказательство теоремы 2.6 является объединением доказательств теоремы 2.4 и теоремы 2.6 из главы 1.

2.2. Оптимальные по порядку пассивные алгоритмы

Сингулярный интеграл с ядром Гильберта

$$\mathcal{F}\varphi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \varphi(\sigma) \mathrm{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma$$

будем вычислять по квадратурным формулам вида

$$\mathcal{F}\varphi = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl}(s)\varphi^{(l)}(t_k) + R_N(s, s_k, p_k, \varphi), \tag{2.13}$$

а сингулярный интеграл с ядром Коши

$$T\varphi = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

будем вычислять по квадратурным формулам вида

$$T\varphi = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl}(t)\varphi^{(l)}(t_k) + R_N(t, t_k, p_{kl}, \varphi), \tag{2.14}$$

2.2.1. Формулировки теорем

Теорема 2.7. Пусть $\Psi = \tilde{W}_p^r(1)$ и интеграл $\mathcal{F}\varphi$ вычисляется по к.ф. вида (2.13) при $\rho = 0, 1, \ldots, r-1$. Тогда $\zeta_N[\Psi] \geq AN^{-r+1/p}$ $(p > 1)$.

Разобъем сегмент $[0, 2\pi]$ на N равных частей точками $s_k = 2k\pi/N$, $k = 0, 1, \ldots, N$. На каждом сегменте $[s_k, s_{k+1}]$, таком, что $s \notin [s_{k-1}, s_{k+2}]$, функция $\varphi(\sigma)$ заменяется отрезком ряда Тейлора

$$\varphi_N(\sigma) = \varphi(v_k) + \frac{\varphi'(v_k)}{1!}(\sigma - v_k) + \cdots + \frac{\varphi^{r-1}(v_k)}{(r-1)!}(\sigma - v_k)^{r-1},$$

где $v_k = (s_k + s_{k+1})/2$. Если же точка $s \in [s_k, s_{k+1}]$, то в интервале $[s_{k-1}, s_{k+2}]$ функция $\varphi_N(\sigma)$ определяется отрезком ряда Тейлора

$$\varphi_N(\sigma) = \varphi(v_k) + \frac{\varphi'(v_k)}{1!}(\sigma - v_k) + \cdots + \frac{\varphi^{r-1}(v_k)}{(r-1)!}(\sigma - v_k)^{r-1}.$$

В качестве к.ф. для вычисления интеграла $\mathcal{F}\varphi$ возьмем формулу

$$\mathcal{F}\varphi = \mathcal{F}\varphi_N + R_N(\varphi). \tag{2.15}$$

Теорема 2.8. На классе $\tilde{W}_p^r(1)$ к.ф. (2.15) является оптимальной по порядку среди формул вида (2.13). Ее погрешность

$$|R_N(\Psi)| \leq \frac{\pi^{r-1/p}}{(r-1)!((r-1)q+1)^{1/q}} \left[\frac{4}{(1-q)^{1/q}} + \frac{2^{r+1/q}}{(r-1)q+1} \right] \frac{1}{N^{r-1/p}}.$$

Теорема 2.9 [29]. Среди формул вида (2.13) оптимальной по порядку на классе $\Psi = \tilde{W}_p^r(1)$ является к.ф.

$$\mathcal{F}\varphi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} P_N[\varphi] \mathrm{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma + R_N(\varphi), \tag{2.16}$$

где P_N — оператор проектирования на множество интерполяционных тригонометрических полиномов степени N по равностоящим узлам. Ее погрешность $R_N[\Psi] = O(N^{-r+1/p})$.

Теорема 2.10. Пусть $\Psi = V_\psi^r$ и интеграл $\mathcal{F}\varphi$ вычисляется по к.ф. вида (2.13) при $\rho = 0, 1, \ldots, r-1$. Тогда $\zeta_N[\Psi] \geq AN^{-r}\psi^{-r}(N)$.

Теорема 2.11 [29]. Среди к.ф., использующих в N узлах значения подынтегральной функции и ее производных до $r-1$ порядка включительно, формула (2.15) является оптимальной по порядку на классе V_ψ^r. Ее погрешность $R_N[V_\psi^r] = O(N^{-r}\psi^{-1}(N))$.

Теорема 2.12 [29]. Пусть $\Psi = H_p^{r+\alpha}$ и интеграл $\mathcal{F}\varphi$ вычисляется по к.ф. вида (2.13). Тогда $\zeta_N[\Psi] \geq AN^{-r-\alpha+1/p}$.

Теорема 2.13 [36]. Среди формул вида (2.13) оптимальной по порядку на классе $\Psi = H_p^{r+\alpha}$ является к.ф. (2.16). Ее погрешность $R_N[\Psi] = O(N^{-r-\alpha+1/p})$.

Разобьем сегмент $[-1, 1]$ на N равных частей точками $t_k = -1 + {} + 2k/N,\ k = 0, 1, \ldots, N$. Введем к.ф.

$$J\varphi = R_N(\varphi) + \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{N-1}{}' \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{T_{r-1}(\varphi,\Delta_k,v_k)}{\tau-t} d\tau + \int\limits_{t_{j-1}}^{t_{j+2}} \frac{T_{r-1}(\varphi,[t_{j-1},t_{j+2}],v_j)}{\tau-t} d\tau \\ \text{при } 1 \leq j \leq N-2; \\ \int\limits_{t_0}^{t_2} \frac{T_{r-1}(\varphi,[t_0,t_2],t_0)}{\tau-t} d\tau + \sum\limits_{k=2}^{N-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{T_{r-1}(\varphi,\Delta_k,v_k)}{\tau-t} d\tau \\ \text{при } j = 0; \\ \int\limits_{t_{N-2}}^{t_N} \frac{T_{r-1}(\varphi,[t_{N-2},t_N],t_N)}{\tau-t} d\tau + \sum\limits_{k=0}^{N-3} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{T_{r-1}(\varphi,\Delta_k,v_k)}{\tau-t} d\tau \\ \text{при } j = N-1, \end{cases} \tag{2.17}$$

где $t \in [t_j, t_{j+1})$, знак $\sum'$ означает суммирование по $k \neq j-1, j, j+1$, $v_k = (t_{k+1} + t_k)/2$. Отметим, что выше (в первой из формул (2.17) вместо $T_{r-1}(\varphi, \Delta_0, v_0)$ и $T_{r-1}(\varphi, \Delta_{N-1}, v_{N-1})$ можно брать $T_{r-1}(\varphi, \Delta_0, t_0)$ и $T_{r-1}(\varphi, \Delta_{N-1}, t_N)$ соответственно.

Теорема 2.14 [29]. Среди всевозможных к.ф. вида (2.14) оптимальной по порядку на классе $W^r L_p(1; [-1, 1])$ является формула (2.17). Ее погрешность $R_N\big[W_p^r(1; [-1, 1])\big] \asymp N^{-r+1/p}$.

2.2.2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 2.7. Разобъем сегмент $[0, 2\pi]$ на $2(N+$ $+1)$ равных частей точками $s_k = \pi k(N+1)^{-1}$, $k = 0, 1, \ldots, 2(N+1)$. Тогда найдется, по крайней мере, $N+1$ интервалов, в которых отсутствуют узлы к.ф. (2.13). Следуя Ю.И. Маковозу и М.А. Шешко [103], назовем эти интервалы отмеченными и обозначим через $\theta(k, l)$ отношение числа отмеченных отрезков среди $\Delta_k, \ldots, \Delta_{l-1}$ ($\Delta_i = [s_i, s_{i+1})$) к общему числу отрезков $l - k$ ($k = 0, 1, \ldots, 2N+1$), $l = k+1, \ldots, 2N+1$.

Следуя [103] покажем, что существует такое число $\bar{k}$, $\bar{k} < 3(N+$ $+1)/2$, для которого $\min\limits_{l>\bar{k}} \Theta(\bar{k}, l) \geq 1/3$.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что не существует $\bar{k}$ ($\bar{k} < 3(N+1)/2$), для которого $\min_{l>\bar{k}} \Theta(\bar{k}, l) \geq 1/3$. Тогда для некоторого l_1 будет $\Theta(0, l_1) < 1/3$. Затем найдется такое l_2, что $\Theta(l_1, l_2) < 1/3$. Продолжим этот процесс до тех пор, пока не найдется такое μ, что $\Theta(l_{\mu-1}, l_\mu) < 1/3$, а $l_\mu > 3(N+1)/2$. Тогда общее число отмеченных квадратов не может превысить $\frac{1}{2}(N+1) + 2N - \frac{3}{2}(N+1) =$ $= N - 1$, в то время, как по построению число отмеченных квадратов не меньше $N+1$. Из полученного противоречия следует, что существует такое $\bar{k}(\bar{k} < 3(N+1)/2)$, что $\min_{l>\bar{k}} \Theta(\bar{k}, l) \geq \frac{1}{3}$.

Положим в интеграле $\mathcal{F}\varphi$ $s = 2\pi\bar{k}/(2N+2)$ и введем функцию $\varphi^*(\sigma)$, равную нулю на неотмеченных интервалах, на отмеченных интервалах, лежащих левее точки s, и на интервале $[s, s + \pi/(N+1)]$. На остальных отмеченных интервалах функция $\varphi^*(\sigma)$ определяется формулой

$$\varphi^*(\sigma) = BN^{r-1+1/p}(((\sigma - s_k)(s_{k+1} - \sigma))^r (\sin^2(N+1)(\sigma - s)))/(\sigma - s)$$

при $s_k \leq \sigma \leq s_{k+1}$, если $\pi/(N+1) < \sigma - s \leq \pi$.

Здесь B — постоянная, которая подбирается таким образом, чтобы $||\varphi^{*(r)}||_{L_p} = 1$. Покажем, что такая константа существует. В самом деле,

$$||\varphi^{*(r)}|| = BN^{r-1+1/p} \times$$

$$\times \left[\sum_{k=\bar{k}+1}^{\bar{k}+N}{}' \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \left| \left[\frac{((\sigma - s_k)(s_{k+1} - \sigma))^r \sin^2(N+1)(\sigma - s)}{\sigma - s} \right]^{(r)} \right|^p d\sigma \right]^{1/p} \leq$$

$$\leq ABN^{-1+1/p} \left[\sum_{k=1}^{N}{}' \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \left| \frac{\sin^2(N+1)\sigma}{s_{k+1}} \right|^p d\sigma \right]^{1/p} \leq$$

$$\leq ABN^{1/p}\left[\sum_{k=1}^{N}{}'\frac{1}{k^p}\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}\left|\sin^2(N+1)\sigma\right|^p d\sigma\right]^{1/p}\leq$$

$$\leq AB\left[\sum_{k=1}^{N}{}'\frac{1}{k^p}\int\limits_{\pi k}^{\pi(k+1)}\left|\sin^2\sigma\right|^p d\sigma\right]^{1/p}=AB.$$

Взяв $B=A^{-1}$, убеждаемся в справедливости неравенства $||\varphi^{*(r)}||_{L_p}=$ $=1$. Здесь $\sum'$ означает суммирование по отмеченным интервалам.

Для нахождения оценки снизу погрешности к.ф. (2.13) подставим функцию φ^* в интеграл $\mathcal{F}\varphi$. В результате имеем

$$\mathcal{F}\varphi^*=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi^*(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=\bar{k}}^{\bar{k}+N}{}'\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}\varphi^*(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma\asymp$$

$$\asymp N^{-r-1+1/p}\sum_{k=\bar{k}}^{\bar{k}+N}{}'\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}\frac{\sin^2(N+1)(\sigma-s)}{s_{k+1}-s}\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma\geq$$

$$\geq AN^{-r-1+1/p}\sum_{k=\bar{k}}^{\bar{k}+N}{}'\frac{N^2}{(k+1)^2}\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}\sin^2(N+1)(\sigma-s)d\sigma=$$

$$=AN^{-r-1+1/p}\sum_{k=\bar{k}}^{\bar{k}+N}{}'\frac{N^2}{(k+1)^2}\int\limits_0^{\pi/(N+1)}\sin^2(N+1)\sigma d\sigma=AN^{-r+1/p}.$$

Доказательство теоремы 2.8. Погрешность к.ф. (2.15) можно представить в виде

$$|R_N(\varphi)|\leq\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\varphi(\sigma)-\varphi_N(\sigma))\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma\right|.$$

Не ограничивая общности, положим $s=0$. Тогда

$$|R_N(\varphi)|=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}|\varphi(\sigma)-\varphi_N(\sigma)|\left|\mathrm{ctg}\frac{\sigma}{2}d\sigma\right|.$$

Из формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме следует, что на сегменте $[s_k, s_{k+1}]$

$$\varphi(\sigma) - \varphi_N(\sigma) = \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_{v_k}^{\sigma} \varphi^{(r)}(t)(\sigma - t)^{r-1} dt.$$

Отсюда следует, что при $\sigma \in \Delta_k^i$ ($\Delta_k^1 = [s_k, v_k], \Delta_k^2 = [v_k, s_{k+1}]$)

$$|\varphi(\sigma) - \varphi_N(\sigma)| = \frac{1}{(r-1)!} |\int\limits_{v_k}^{\sigma} \varphi^{(r)}(t)(\sigma - t)^{r-1} dt| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(r-1)![(r-1)q+1]^{1/q}} \left(\frac{\pi}{N}\right)^{r-1/p} ||\varphi^{(r)}||_{L_p(\Delta_k^i)},\ i = 1, 2.$$

Подставляя полученное неравенство в выражение для $R_N(\varphi)$ после несложных, но громоздких выкладок имеем оценку

$$|R_N(\varphi)| \leq \frac{\pi^{r-1/p}}{(r-1)!((r-1)q+1)^{1/q}} \left[\frac{4}{(1-q)^{1/q}} + \frac{2^{r+1/q}}{(r-1)q+1}\right] \frac{1}{N^{r-1/p}}.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.9 не отличается от приводимого ниже доказательства теоремы 2.13.

Доказательство теоремы 2.10. Введем функцию $y_0(t) = 0$ при $t \notin [0, 2\pi]$ и $y_0(t) = t^r(2\pi - t)^r$ при $t \in [0, 2\pi]$. Как и при доказательстве теоремы 2.3, разделим интервал $[0, 2\pi]$ на $2N$ равных частей и возьмем один из интервалов, в котором отсутствуют узлы к.ф. (2.13). Пусть это будет интервал $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, $t_j = \pi j/N$, $j = 0, 1, \ldots, 2N$. Введем функцию $\varphi^*(t) = B^{-1}\psi^{-1}(2/N)f(t)$, где

$$f(t) = \psi^{-1}(N)N^{-r}y_0(2Nt - 2k\pi) \qquad \mathrm{t} \in [\mathrm{t_k}, \mathrm{t_{k+1}}]0 \qquad ;$$

$$B = 2^r \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |y_0^r(t)|.$$

В качестве s в интеграле $\mathcal{F}\varphi$ возьмем значение $k\pi/N$.

Известно (см. [85]), что $\varphi^*(t) \in V_\psi^r$. Несущественное различие с этой статьей заключается в том, что здесь не требуется бесконечная дифференцируемость функции f.

Подставим теперь функцию $\varphi^*(t)$ в к.ф. (2.13). Нетрудно видеть, что

$$|R_N(s,\varphi)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi}\varphi^*(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi^*(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma\right| \geq$$

$$\geq \frac{B^{-1}}{2\pi}\psi^{-1}(2/N)\psi^{-1}(N)N^{-r+1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}(2Nt-2k\pi)^r(2(k+1)\pi-2Nt)^r dt =$$

$$= \frac{B^{-1}}{4\pi}\psi^{-1}(2/N)\psi^{-1}(N)N^{-r}\int\limits_0^{2\pi}v^r(2\pi-v)^r dv \leq A(\psi^{-1}(N)N^{-r}).$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.11. Приведем две леммы, которые будут использованы при доказательстве теоремы.

Лемма 2.1 [85]. Пусть $f(x)-$ возрастающая выпуклая функция на $[0,\infty)$, и

$$\int\limits_a^b f[x(t)]dt \leq A,$$

где $x(t)-$ неотрицательна и непрерывна в $[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b x(t)dt \leq (b-a)f^{-1}(A/(b-a)).$$

Лемма 2.2 [85]. Пусть функция $g(x)$ непрерывна на $[0,\infty]$, а функция $g(x)/x$ возрастает на $[0,\infty]$. Тогда

$$\sum_{k=1}^n g(x_k) \leq g\left(\sum_{k=1}^n x_k\right), \qquad x_k > 0.$$

При вычислении погрешности к.ф. (2.15) можно, не ограничивая общности, положить $s=0$. Тогда

$$|R_N(\varphi)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi}[\varphi(\sigma)-\varphi_N(\sigma)]\,\mathrm{ctg}\frac{\sigma}{2}d\sigma\right| \leq \frac{1}{\pi}\int\limits_{s_{-1}}^{s_2}|\varphi(\sigma)-\varphi_N(\sigma)|\left|\mathrm{ctg}\frac{\sigma}{2}\right|d\sigma+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{[N/2]}\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}|\varphi(\sigma)-\varphi_N(\sigma)|\left|\mathrm{ctg}\frac{\sigma}{2}\right|d\sigma\le\frac{A}{N^{r-1}}\int\limits_{s_{-1}}^{s_2}\left|\varphi^{(r)}(t)\right|dt+$$

$$+\frac{A}{N^{r-2}}\sum_{k=2}^{[N/2]}\frac{1}{k+1}\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}\left|\varphi^{(r)}(t)\right|dt\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}d\sigma=\frac{A}{N^{r-1}}\sum_{k=2}^{[N/2]}\frac{1}{k}\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}\left|\varphi^{(r)}(t)\right|dt.$$

По лемме 2.1

$\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}|\varphi^{(r)}(t)|dt\le\frac{2\pi}{N}\psi^{-1}(N\alpha_k)$, где $\alpha_k=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}\psi(|\varphi^{(r)}(t)|)dt.$

Воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского, имеем

$$|R_N(\varphi)|\le AN^{-(r-1)}\left[\sum_{k=2}^{[N/2]}k^{-2}\right]^{1/2}\left[\sum_{k=2}^{[N/2]}\left[\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}\left|\varphi^{(r)}(t)\right|dt\right]^2\right]^{1/2}\le$$

$$\le AN^{-(r-1)}\left[\sum_{k=2}^{[N/2]}N^{-2}(\psi^{-1}(N\alpha_k))^2\right]^{1/2}\le AN^{-r}\left[\sum_{k=2}^{[N/2]}(\psi^{-1}(N\alpha_k))^2\right]^{1/2}.$$

Так как по условию b определения класса V_ψ^r функция $x^{-1}(\psi^{-1}(x))^2$ возрастающая, то воспользовавшись леммой 2.2, имеем

$|R_N(\varphi)|\le AN^{-r}[[\psi^{-1}(\sum\limits_{k=0}^{[N/2]}N\alpha_k)]^2]^{1/2}=AN^{-r}\psi^{-1}(N\sum\limits_{k=0}^{[N/2]}\alpha_k).$

Так как $\sum\limits_{k=0}^{[N/2]}\alpha_k=\frac{1}{2\pi}$, то $|R_N[\Psi]|\le AN^{-r}\psi^{-1}[Nb]\le AN^{-r}\psi^{-1}(N)$,

где $0<b=\sum\limits_{k=0}^{[N/2]}\alpha_k\le\frac{1}{2\pi}$.

Это следует из того, что функция $\psi^{-1}(x)$ тоже возрастающая. Теорема доказана.

При доказательстве теоремы 2.12 будет использовано следующее утверждение.

Лемма. 2.3. Функция $(s+N^{-1})^{-\alpha}(\cos^2(Ns)^\alpha)N^{-2\alpha+1/p}$ удовлетворяет интегральному условию Гельдера H_p^α в пространстве L_p.

Доказательство. В самом деле,

$$\left|\int\limits_0^\pi \left|\frac{\cos^2(N(s+h))^\alpha}{(s+N^{-1}+h)^\alpha} - \frac{\cos^2(Ns)^\alpha}{(s+N^{-1})^\alpha}\right|^p ds\right|^{1/p} =$$

$$= \left[\int\limits_0^\pi \left|\frac{\cos^2(N(s+h))^\alpha - \cos^2(Ns)^\alpha}{(s+N^{-1}+h)^\alpha} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\cos^2(Ns)^\alpha((s+N^{-1}+h)^\alpha - (s+N^{-1})^\alpha)}{(s+N^{-1}+h)^\alpha(s+N^{-1})^\alpha}\right|^p ds\right|^{1/p} \leq$$

$$\leq \left\|\frac{\cos^2(N(s+h))^\alpha}{(s+N^{-1}+h)^\alpha} - \frac{\cos^2(Ns)^\alpha}{(s+N^{-1}+h)^\alpha}\right\| +$$

$$+ \left\|\frac{\cos^2(Ns)^\alpha((s+N^{-1}+h)^\alpha - (s+N^{-1})^\alpha)}{(s+N^{-1}+h)^\alpha(s+N^{-1})^\alpha}\right\|.$$

Оценим каждую из этих норм в отдельности, полагая $\alpha p > 1$

$$\left\|\frac{\cos^2(N(s+h))^\alpha - \cos^2(Ns)^\alpha}{(s+N^{-1}+h)^\alpha}\right\| \leq AN^\alpha h^\alpha \left[\int\limits_0^\pi \left|\frac{\sin\frac{(N(s+h))^\alpha + (Ns)^\alpha}{2}}{(s+N^{-1}+h)^\alpha}\right|^p ds\right]^{1/p} \leq$$

$$\leq AN^{2\alpha-1/p}h^\alpha,$$

$$\left\|\frac{\cos^2(Ns)^\alpha((s+N^{-1}+h)^\alpha - (s+N^{-1})^\alpha)}{(s+N^{-1}+h)^\alpha(s+N^{-1})^\alpha}\right\| \leq$$

$$\leq Ah^\alpha \left[\int\limits_0^\pi \left|\frac{\cos^2(Ns)^\alpha}{(s+N^{-1}+h)^\alpha}\frac{1}{(s+N^{-1})^\alpha}\right|^p ds\right]^{1/p} \leq AN^{2\alpha-1/p}h^\alpha.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.12. Как и при доказательстве теоремы 2.7, разобьем сегмент $[0, 2\pi]$ на $2(N+1)$ равных частей, полагая $s = 2\pi\bar{k}/(2N+2)$, и введем функцию $\varphi^*(\sigma)$, равную нулю на неотмеченных интервалах и на отмеченных, лежащих левее точки s. На остальных отмеченных интервалах функция $\varphi^*(\sigma)$ определяется формулой
$\varphi^*(\sigma) = BN^{r-2\alpha+1/p}((\sigma-s)(s_{k+1}-\sigma))^r(\cos^2(N(\sigma-s))^\alpha)(\sigma-s+N^{-1})^{-\alpha}$

при $k\pi/(N+1) \le \sigma \le (k+1)\pi/(N+1)$ и $0 \le \sigma - s \le \pi$.

Здесь $B-$ константа, подбираемая из условия $||\varphi^{*(r)}(\sigma+h) - |\varphi^{*(r)}(\sigma)||_{L_p} \le h^\alpha$. Из предыдущей леммы следует существование такой константы.

Подставим функцию $\varphi^*(\sigma)$ в интеграл $\mathcal{F}\varphi$. Тогда

$$\sup_{\varphi\in H_p^{r+\alpha}} \inf_{(t_k,p_k)} |R_N(\varphi,t_k,p_k,s)| \ge \mathcal{F}\varphi^* = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi^*(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=\bar{k}}^{\bar{k}+N}{}' \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi^*(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=\bar{k}}^{\bar{k}+N}{}' \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi^*(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma =$$

$$= AN^{-r-2\alpha+1/p}\sum_{k=\bar{k}+1}^{\bar{k}+N}{}' \int\limits_{\Delta_k'} \frac{\cos^2(N(\sigma-s))^\alpha}{(\sigma-s+N^{-1})^\alpha}\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma =$$

$$= AN^{-r-2\alpha+1/p}\sum_{k=\bar{k}+1}^{\bar{k}+N}{}' \int\limits_{\Delta_k'} \frac{\cos^2(N(\sigma-s))^\alpha}{(\sigma-s+N^{-1})^\alpha(\sigma-s)}d\sigma =$$

$$= AN^{-r-2\alpha+1/p}\sum_{k=1}^{N}{}' \int\limits_{\Delta_k'} \frac{\cos^2(N\sigma)^\alpha}{(\sigma+N^{-1})^\alpha\sigma}d\sigma = AN^{-r-\alpha+1/p}.$$

Здесь $\sum'$ означает суммирование по выделенным интервалам, $\Delta_k' = [s_k + \pi/4N, s_{k+1} - \pi/4N]$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.13. Обозначим через $D_N[\varphi] = \varphi - P_N[\varphi]$. Тогда погрешность к.ф. (2.16) равна

$$R_N(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} D_N[\varphi](\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma.$$

Из неравенства Рисса следует, что

$$||R_N(s)||_{L_p} \le A||D_N[\varphi]||_{L_p} \le AE_{N,p}[\varphi],$$

где $E_{N,p}[\varphi]$ – величина погрешности наилучшего приближения полиномами степени N в метрике пространства L_p.

В книге Н.И. Ахиезера [3] доказано, что $E_{N,p}(\varphi) \leq 3\pi\omega_p(\varphi^{(r)}, (N + + 1)^{-1})/4(N+1)^r$. Поэтому $||R_N(\varphi)||_{L_p} \leq AN^{-r-\alpha}$.

Известно неравенство С.М. Никольского, согласно которому для любого полинома f_n степени n $\quad |f_n(s)| \leq n^{1/p}||f_n(s)||_{L_p}$. Из этого неравенства следует, что $|R_N(\varphi)| \leq AN^{-r-\alpha+1/p}$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.14. Положим для определенности $t \in (t_0, t_1)$ (другие случаи рассматриваются аналогично). Тогда

$$|R_N(\varphi)| \leq \sum_{k=2}^{N-1} \left| \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{R_r(\varphi, \Delta_k, v_k)}{\tau - t} d\tau) \right| + \left| \int\limits_{t_0}^{t_2} \frac{R_r(\varphi, [t_0, t_2], t_0)}{\tau - t} d\tau) \right| = r_1 + r_2,$$

где $R_r(\varphi, \Delta_k, v_k) = \varphi(\tau) - T_{r-1}(\varphi, \Delta_k, v_k)$.

Воспользовавшись формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, имеем

$$|\varphi(t) - T_{r-1}(\varphi, \Delta_k, v_k)| \leq \frac{1}{(r-1)!} \left| \int\limits_{v_k}^{t} (t-\tau)^{r-1} \varphi^{(r)}(\tau) d\tau) \right| \leq$$

$$\leq AN^{-r+1/p} \|\varphi^{(r)}\|_{L_p(\Delta_k)}.$$

Отсюда

$$r_1 \leq AN^{-r+1/p} \sum_{k=2}^{N-1} \frac{1}{k} \|\varphi^{(r)}\|_{L_p(\Delta_k)} \leq AN^{-r+1/p}.$$

Приступим к оценке r_2.

Пусть $h = t - t_0$. Тогда

$$r_2 = \left| \int\limits_{t-h}^{t+h} \frac{R_r(\varphi, [t_0, t_2], t_0)}{t - \tau} d\tau \right| + \left| \int\limits_{t+h}^{t_2} \frac{R_r(\varphi, [t_0, t_2], t_0)}{t - \tau} d\tau \right| = r_3 + r_4.$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности. Очевидно,

$$r_3 = \frac{1}{(r-1)!} \left| \int\limits_{t-h}^{t+h} \frac{\int\limits_{-1}^{\tau} (\tau - v)^{r-1} \varphi^{(r)}(v) dv - \int\limits_{-1}^{t} (t - v)^{r-1} \varphi^{(r)}(v) dv}{\tau - t} d\tau \right|.$$

Пусть $\tau < t$. Тогда

$$\left|\int\limits_{-1}^{\tau}(\tau-v)^{r-1}\varphi^{(r)}(v)dv-\int\limits_{-1}^{t}(t-v)^{r-1}\varphi^{(r)}(v)dv\right|\leq$$

$$\leq\left|\int\limits_{-1}^{\tau}\left[(\tau-v)^{r-1}-(t-v)^{r-1}\right]\varphi^{(r)}(v)dv\right|+\left|\int\limits_{\tau}^{t}(t-v)^{r-1}\varphi^{(r)}(v)dv\right|\leq$$

$$\leq\left[\int\limits_{-1}^{\tau}\left|(\tau-v)^{r-1}-(t-v)^{r-1}\right|^{q}dv\right]^{1/q}\|\varphi^{(r)}\|_{L_p[-1,t_2]}+$$

$$+\left[\int\limits_{\tau}^{t}(t-v)^{(r-1)q}dv\right]^{1/q}\|\varphi^{(r)}\|_{L_p[-1,t_2]}\leq$$

$$\leq A|\tau-t|N^{-r+1+1/p}\|\varphi^{(r)}\|_{L_p[-1,t_2]}+A|t-\tau|^{r-1/p}\|\varphi^{(r)}\|_{L_p[-1,t_2]}.$$

Отсюда

$$r_3\leq AN^{-r+1/p}\|\varphi^{(r)}\|_{L_p[-1,t_2]}.$$

Аналогично рассматривается случай, когда $\tau\geq t$.

Приступим к оценке r_4

$$r_4\leq\sum_{k=1}^{[2/Nh]}\left|\int\limits_{t+kh}^{t+(k+1)h}\frac{R_r(\varphi;[t_0,t_2],t_0)}{\tau-t}d\tau\right|\leq$$

$$\leq A\sum_{k=1}^{[2/Nh]}\frac{1}{kh}\int\limits_{t+kh}^{t+(k+1)h}\left[\int\limits_{t_0}^{\tau}(\tau-v)^{r-1}\varphi^{(r)}(v)dv\right]d\tau\leq$$

$$\leq A\sum_{k=1}^{[2/Nh]}\frac{1}{k}\left[\int\limits_{t_0}^{(k+2)h}((k+2)h-v)^{(r-1)q}dv\right]^{1/q}\left[\int\limits_{t_0}^{(k+2)h}|\varphi^{(r)}(\tau)|^{p}d\tau\right]^{1/p}\leq$$

$$\leq A\left[\int\limits_{t_0}^{(k+2)h}|\varphi^{(r)}(\tau)|^{p}d\tau\right]^{1/p}\sum_{k=1}^{[2/Nh]}k^{r-1-1/p}h^{r-1/p}\leq$$

$$\leq \frac{A}{N^{r-1/p}} \left[\int\limits_{t_0}^{(k+2)h} |\varphi^{(r)}(\tau)|^p d\tau \right]^{1/p}.$$

Из полученных оценок следует, что

$$R_N\Big[W_p^r(1,[-1,1])\Big] \leq AN^{-r+1/p}.$$

Теорема доказана.

3. Оптимальная регуляризация сингулярных интегралов

Рассмотрим сингулярный интеграл $\mathcal{F}\varphi$ в предположении, что функция $\varphi(\sigma)$ принадлежит классу H_1, но задана приближенно как непрерывная функция из $C_{2\pi}$. Тогда оператор $\mathcal{F}$ неограничен и задача вычисления интеграла $\mathcal{F}\varphi$ становится некорректной. В подобной постановке задача исследовалась Г.Г. Абдуловой [1],предложившей один из алгоритмов регуляризации. Ниже строится оптимальный алгоритм регуляризации. При его построении была существенно использована работа С.Б. Стечкина [139]. Напомним некоторые обозначения и результаты этой статьи.

Пусть X, $Y-B-$ пространства, $U-$ линейный необязательно ограниченный оператор, действующий из X в Y, $D_u \subset X$, $K-$ класс элементов из X, входящий в D_u, $R(U,S,K) = \sup\limits_{x\in K} ||Ux - Sx||_Y$, где $S-$ оператор из X в Y. Ставится задача найти

$$E_N(U,K) = \inf_{||S||\leq N} R(U,S,K) = \inf_{||S||\leq N} \sup_{x\in K} ||Ux - Sx||_Y.$$

Для получения оценки снизу в упомянутой статье С.Б. Стечкина введен функционал $\Phi(M) = \Phi(M,U,K) = \sup\limits_{x\in K, ||x||\leq M} ||Ux||$ $(M \geq 0)$ и показано, что $E_N(U,K) \geq \Phi(M) - NM$.

Приступим к построению оптимальной регуляризации интеграла $\mathcal{F}\varphi$.

Теорема 3.1 [29]. Пусть $K = H_1(1)$. Тогда $E_N(\mathcal{F},K) \sim \pi/L$, где L и N связаны соотношением $N = 2\pi^{-1}\ln L$, и оператор $\mathcal{F}^*\varphi =$ $= \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{[0,2\pi]\setminus\Delta} \varphi(\sigma)\mathrm{ctg}\dfrac{\sigma - s}{2} d\sigma$, $\Delta = [s - \pi/L, s + \pi/L]$ реализует это равенство в сильной асимптотике.

Доказательство. Оценим снизу величину функционала $\Phi(M) = \sup\limits_{\varphi\in K, ||\varphi||_C\le M} ||\mathcal{F}\varphi||_C$ при $M = \pi/L$.

Введем функцию

$\varphi^*(\sigma) = \sigma \quad 0 \le \sigma \le \pi/L, \pi/L \quad \pi/L \le \sigma \le \pi - \pi/L, \pi - \sigma \quad \pi - \pi/L \le \sigma \le \pi,$

$\varphi^*(\pi + \sigma) = -\varphi^*(\sigma) \;\; 0 \le \sigma \le \pi.$

Тогда

$$\Phi(M) = \sup_{\varphi\in K, ||\varphi||\le M} \max_s \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi(\sigma) \mathrm{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma \right| \ge \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi^*(\sigma) \mathrm{ctg} \frac{\sigma}{2} d\sigma \ge$$

$$\ge \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi/L} \sigma \mathrm{ctg} \frac{\sigma}{2} d\sigma + \frac{\pi}{L} \int\limits_{\pi/L}^{\pi-\pi/L} \mathrm{ctg} \frac{\sigma}{2} d\sigma \ge \frac{2}{L} + \frac{2\ln L}{L} + o(1).$$

По теореме С.Б. Стечкина (см. [85]) $E_N(\mathcal{F}, K) \ge \Phi(M) - NM$. Поэтому $E_N(\mathcal{F}, K) \ge \frac{2}{L} + \frac{2\ln L}{L} - \frac{N\pi}{L} + o(1)$. Полагая $N = 2\pi^{-1}\ln L$, получаем оценку $E_N(\mathcal{F}, K) \ge \frac{2}{L} + O(1)$.

В качестве оператора, реализующего эту погрешность, возьмем $\mathcal{F}^*\varphi = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_{[0,2\pi]\setminus\Delta} \varphi(\sigma) \mathrm{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma$, где $\Delta = [s - \pi/L, s + \pi/L]$.

Нетрудно видеть, что $||\mathcal{F}^*|| = 2\pi^{-1}\ln L + O(1)$ и

$$||(\mathcal{F} - \mathcal{F}^*)\varphi|| = \max_s \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_\Delta \varphi(\sigma) \mathrm{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma \right| =$$

$$= \max_s \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_\Delta (\varphi(\sigma) - \varphi(s)) \mathrm{ctg} \frac{\sigma - s}{2} \, d\sigma \right| \le \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi/L} \sigma \mathrm{ctg} \frac{\sigma}{2} d\sigma \sim \frac{2}{L}.$$

Из сопоставления оценок снизу и сверху следует, что оператор $\mathcal{F}^*$ осуществляет наилучшее приближение в сильной асимптотике. Теорема доказана.

4. Интегралы с весами

В этом параграфе исследуются к.ф. видов

$$S\varphi = \sum_{k=1}^N \varphi(t_k) p_k(t) + R_N(t, t_k, p_k, \varphi), \tag{4.1}$$

$$S\varphi = \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^\rho p_{kl}(t) \varphi^{(l)}(t_k) + R_N(t, t_k, p_{kl}, \varphi), \tag{4.2}$$

предназначенные для вычисления интеграла

$$S\varphi = \int\limits_0^1 \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau^\gamma(\tau - t)}, 0 \le \gamma < 1.$$

4.1. Оптимальные по порядку пассивные алгоритмы на классе $\mathbf{W^rH}_\alpha$

4.1.1. Формулировки теорем

Теорема 4.1 [29]. Пусть $\Psi = H_\alpha(1)$, $\alpha > \gamma$. Среди всевозможных квадратурных формул вида (4.1) при $3{\cdot}2^{1+1/\gamma}\alpha\gamma^{-1/\gamma}(2-\gamma)^{-1}N^{-\alpha/(\alpha-\gamma)} \le$ $\le t \le 1$ формула

$$S\varphi = \sum_{k=0}^{j-2} \varphi(s'_k) \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{d\tau}{\tau^\gamma(\tau - t)} + \sum_{k=j+5}^{N-1} \varphi(s'_k) \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{d\tau}{\tau^\gamma(\tau - t)} +$$

$$+\varphi(s'_j) \int\limits_{s_{j-1}}^{s_{j+5}} \frac{d\tau}{\tau^\gamma(\tau - t)} + R_N(\varphi), \tag{4.3}$$

где $s_k = (k/N)^{\alpha/(\alpha-\gamma)}$, $k = 0, 1, \ldots, N$, $s'_k = (s_k + s_{k+1})/2$, $k = 0, 1, \ldots, N-$ -1, $t \in [s_j, s_{j+1})$, является оптимальной по порядку. Ее погрешность при $t \in [s_j, s_{j+1})$ равна $|R_N[\Psi]| \asymp (\ln j + \ln(N - j))N^{-\alpha}$.

Построим к.ф. для вычисления сингулярного интеграла $S\varphi$ в предположении, что $\varphi \in W^r(1)$ $(r = 1, 2, \ldots)$. Разобьем сегмент $[0, 1]$ на N частей точками $s_k = (k/N)^{r/(r-\gamma)}$, $k = 0, 1, \ldots, N$. Пусть $t \in [s_j, s_{j+1})$. Тогда на сегменте $[s_{j-1}, s_{j+5})$ функция $\varphi(\sigma)$ аппроксимируется полиномом

$$\varphi_N(\sigma) = \varphi(s_j) + \frac{\varphi'(s_j)}{1!}(\sigma - s_j) + \cdots + \frac{\varphi^{(r-1)}(s_j)}{(r-1)!}(\sigma - s_j)^{r-1}.$$

На остальных сегментах $[s_k, s_{k+1})$ $(k \ne j - 1, \ldots, j + 4)$ функция $\varphi(\sigma)$ аппроксимируется полиномами

$$\varphi_N(\sigma) = \varphi(s_k) + \frac{\varphi'(s_k)}{1!}(\sigma - s_k) + \cdots + \frac{\varphi^{(r-1)}(s_k)}{(r-1)!}(\sigma - s_k)^{r-1}.$$

Определим квадратурную формулу выражением

$$S\varphi = \int\limits_0^1 \frac{\varphi_N(\tau)d\tau}{\tau^\gamma(\tau - t)} + R_N(\varphi). \tag{4.4}$$

Теорема 4.2 [29]. Пусть $\Psi = W^r(1)$. Среди всевозможных квадратурных формул вида (4.2) формула (4.4) является оптимальной по порядку в предположении, что $t \in [(b_1/N)^{r/(r-\gamma)}, 1]$, где $b_1 = 2\gamma^{-1/\gamma} r(r - \gamma)^{-1}$. Погрешность $R_N[\Psi]$ этой формулы при $t \in [s_j, s_{j+1}]$ равна

$$R_N[\Psi] \asymp (\ln j + \ln(N - j))N^{-r}.$$

Пусть $P_r(\varphi, [-1, 1])-$ полином степени $r-1$, интерполирующий функцию $\varphi(t)$ на сегменте $[-1, 1]$ по корням полинома Чебышева 1-го рода r-й степени. Тогда через $P_r(\varphi, \Delta_k)$ ($\Delta_k = [s_k, s_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, N - 1$), $s_k = (\frac{k}{N})^{\frac{r}{r-\gamma}}$, обозначим полином, получающийся из $P_r(\varphi, [-1, 1])$ при отображении сегмента $[-1, 1]$ на Δ_k. Построим к.ф.

$$S\varphi = \sum_{k=0}^{j-2} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{P_r(\varphi, \Delta_k)d\tau}{\tau^\gamma(\tau - t)} + \sum_{k=j+2}^{N-1} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{P_r(\varphi, \Delta_k)d\tau}{\tau^\gamma(\tau - t)} +$$

$$+ \int\limits_{s_{j-1}}^{s_{j+2}} \frac{P_r(\varphi, [s_{j-1}, s_{j+2}])d\tau}{\tau^\gamma(\tau - t)} + R_N(\varphi). \tag{4.5}$$

Теорема 4.3 [29]. Пусть $\Psi = W^r(1)$. Квадратурная формула (4.5) оптимальна по порядку среди формул вида (4.1) и ее погрешность равна $R_N[\Psi] \asymp (\ln j + \ln(N - j))N^{-r}$ в предположении, что $t \in [s_j, s_{j+1})$.

4.1.2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 4.1. Найдем оценку снизу величины $\zeta_N[\Psi]$ при $0 < \alpha \leq 1$. Разобьем сегмент $[0, 1]$ на $2N + 2$ частей точками $v_k = (k/(2N+2))^{\alpha/(\alpha-\gamma)}$, $k = 0, 1, \ldots, 2N+2$. Так как к.ф. (4.1) имеет N узлов, то, по крайней мере, в N интервалах $\Delta_k = (v_k, v_{k+1})$ будут отсутствовать узлы к.ф. Как и в разд. 2 эти интервалы назовем отмеченными. Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 2.7, можно показать, что, начиная с некоторого номера $\bar{k} < 3(N + 1)/2$, отношение числа отмеченных интервалов среди интервалов $\Delta_{\bar{k}}, \ldots, \Delta_{\bar{k}+l}$ к

общему числу этих интервалов больше или равно $1/3$. Положим $t = v_{\bar{k}}$ и в отмеченных интервалах построим функцию $\varphi^*(\tau)$ по формуле $\varphi^*(\tau) = (\min\limits_{1\le k\le 2N+2} |\tau - v_k|^\alpha)\mathrm{sgn}(t - v_{\bar{k}})$. Проделав ряд достаточно громозких выкладок, получаем оценку

$$\sup_{\varphi\in H_\alpha(1)} \max_t S\varphi \ge (S\varphi^*)(v_{\bar{k}}) \ge \frac{(1+o(1))\ln N}{3\cdot 2^{2\alpha}(1+\alpha)N^\alpha}\left(\frac{\alpha}{\alpha-\gamma}\right)^{1+\alpha}.$$

Погрешность к.ф. (4.3) определяется из неравенства

$$|R_N(\varphi)| \le \sum_{k=0}^{j-2} |\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(s'_k)}{\tau^\gamma(\tau-t)}d\tau| + \sum_{k=j+5}^{N-1} |\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(s'_k)}{\tau^\gamma(\tau-t)}d\tau| +$$

$$+|\int\limits_{s_{j-1}}^{s_{j+5}} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(s'_j)}{\tau^\gamma(\tau-t)}d\tau| = r_1 + r_2 + r_3. \qquad (4.6)$$

Оценим первую сумму, стоящую в правой части неравенства (4.6):

$$r_1 = \sum_{k=0}^{j-2} |\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(s'_k)}{\tau^\gamma(\tau-t)}d\tau| \le |\int\limits_{s_0}^{s_1} \frac{|\varphi(\tau)-\varphi(s'_0)|}{\tau^\gamma|\tau-t|}d\tau +$$

$$+\sum_{k=1}^{j-2} |\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{|\varphi(\tau)-\varphi(s'_k)|}{\tau^\gamma|\tau-t|}d\tau \le$$

$$\le \frac{1}{(1-\gamma)(j^{\alpha/(\alpha-\gamma)}-1)N^\alpha} + \sum_{k=1}^{j-2}\left(\frac{N}{k}\right)^{\frac{\alpha\gamma}{\alpha-\gamma}} \frac{1}{s_j - s_{k+1}}\frac{2}{1+\alpha}\left(\frac{s_{k+1}-s_k}{2}\right)^{1+\alpha} \le$$

$$\le \frac{1}{(1-\gamma)(j^{\alpha/(\alpha-\gamma)}-1)N^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha(1+\alpha)N^\alpha}\left(\frac{\alpha}{\alpha-\gamma}\right)^\alpha \sum_{k=1}^{j-2}(1+\frac{1}{k})^{\frac{\alpha\gamma}{\alpha-\gamma}}\frac{1}{j-k-1}.$$

Аналогично может быть получена оценка

$$r_2 = \sum_{k=j+5}^{N-1} |\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(s'_k)}{\tau^\gamma(\tau-t)}d\tau| \le$$

$$\leq \frac{1}{2^{\alpha}(1+\alpha)}\left(\frac{\alpha}{\alpha-\gamma}\right)^{1+\alpha}\frac{1}{N^{\alpha}}\left(1+\frac{1}{j+5}\right)^{(1+\alpha)\gamma/(\alpha-\gamma)}\ln(N-j).$$

Осталось оценить третье слагаемое из правой части неравенства (4.6). Покажем, что, начиная со значения $j \geq 1+3\cdot 2^{1+1/\gamma}\gamma^{-1/\gamma}\alpha\times$ $\times(\alpha-\gamma)^{-1}=b$, существует сегмент $\Delta\subset[s_{j-1},s_{j+5}]$, левым концом которого является точка s_{j-1}, такой, что $\int\limits_{\Delta}\tau^{-\gamma}(\tau-t)^{-1}d\tau\geq 0$. Для справедливости этого утверждения достаточно доказать, что

$$\int\limits_{s_{j-1}}^{s_{j+5}}\frac{d\tau}{\tau^{\gamma}(\tau-t)}>0. \tag{4.7}$$

Пусть $\delta_1=|t-s_{j-1}|$, а $\delta_2=|s_{j+5}-t|$. Тогда

$$\int\limits_{s_{j-1}}^{s_{j+5}}\frac{d\tau}{\tau^{\gamma}(\tau-t)}=\int\limits_{t-\delta_1}^{t+\delta_2}\frac{d\tau}{\tau^{\gamma}(\tau-t)}=\int\limits_{t}^{t+\delta_1}\frac{1}{(\tau-t)}\left[\frac{1}{\tau^{\gamma}}-\frac{1}{(2t-\tau)^{\gamma}}\right]d\tau+$$

$$+\int\limits_{t+\delta_1}^{t+\delta_2}\frac{d\tau}{\tau^{\gamma}(\tau-t)}=v_1+v_2.$$

Очевидно, что $v_1\leq 0$, $v_2>0$. Сумма $v_1+v_2\geq 0$, если $v_2>|v_1|$. Оценим $|v_1|$ сверху, а v_2 снизу:

$$|v_1|=\int\limits_{t}^{t+\delta_1}\frac{1}{(\tau-t)}\left|\frac{1}{\tau^{\gamma}}-\frac{1}{(2t-\tau)^{\gamma}}\right|d\tau\leq\frac{2^{\gamma}\delta_1^{\gamma}}{\gamma t^{\gamma}(t-\delta_1)^{\gamma}}\leq\frac{2^{\gamma}(s_{j+1}-s_{j-1})^{\gamma}}{\gamma s_j^{\gamma}s_{j-1}^{\gamma}}\leq$$

$$\leq\frac{2^{1+\gamma}}{\gamma}\left(\frac{\alpha}{\alpha-\gamma}\right)^{\gamma}\frac{(j+1)^{\gamma^2/(\alpha-\gamma)}}{s_{j-1}^{2\gamma}N^{\alpha\gamma/(\alpha-\gamma)}};$$

$$v_2=\int\limits_{t+\delta_1}^{t+\delta_2}\frac{d\tau}{\tau^{\gamma}(\tau-t)}\geq\frac{\delta_2-\delta_1}{\delta_2(t+\delta_2)^{\gamma}}>\frac{s_{j+5}-s_{j+3}}{s_{j+5}^{\gamma}(s_{j+5}-s_j)}>\frac{1}{3s_{j+5}^{\gamma}}.$$

Для справедливости неравенства $v_1+v_2\geq 0$ достаточно, чтобы $s_{j+5}^{-\gamma}\geq 3\cdot 2^{1+\gamma}\alpha^{\gamma}(j+1)^{\gamma^2/(\alpha-\gamma)}\gamma^{-1}(\alpha-\gamma)^{-\gamma}s_{j-1}^{2\gamma}N^{-\alpha\gamma/(\alpha-\gamma)}$. Легко показать, что

последнее неравенство справедливо при $j \geq b$. Следовательно, при $t \in [(b/N)^{\alpha/(\alpha-\gamma)}, 1]$ справедливо неравенство (4.7). Установив справедливость неравенства (4.7), легко оценить r_3:

$$r_3 = \left| \int\limits_{s_{j-1}}^{s_{j+5}} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(s'_j)}{\tau^\gamma(\tau - t)} d\tau \right| \leq \left| \int\limits_{\Delta} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau^\gamma(\tau - t)} d\tau \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{[s_{j-1}, s_{j+5}] \setminus \Delta} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(s'_j)}{\tau^\gamma(\tau - t)} d\tau \right| = r'_3 + r''_3.$$

Нетрудно видеть, что

$$r'_3 \leq \frac{2}{\alpha N^\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha - \gamma} \right)^\alpha \left(\frac{j+1}{j-1} \right)^{\alpha\gamma/(\alpha-\gamma)};$$

$$r''_3 \leq \frac{2}{1+\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha - \gamma} \right)^\alpha \frac{1}{N^\alpha} \left(\frac{j+5}{j-1} \right)^{(\alpha+1)\gamma/(\alpha-\gamma)}.$$

Собирая вместе оценки $r_1 - r_3$, приходим к неравенству

$$|R_N(\phi)| \leq \frac{1}{(1-\gamma)(j^{\alpha/(\alpha-\gamma)} - 1)N} +$$

$$+ \frac{1}{2^\alpha(1+\alpha)} \left(\frac{\alpha}{\alpha - \gamma} \right)^\alpha \frac{1}{N^\alpha} \sum_{k=1}^{j-2} (1 + \frac{1}{k})^{\alpha\gamma/(\alpha-\gamma)} \frac{1}{j-k-1} +$$

$$+ \frac{1}{2^\alpha(1+\alpha)} \left(\frac{\alpha}{\alpha - \gamma} \right)^{1+\alpha} \frac{1}{N^\alpha} \left(1 + \frac{1}{j+5} \right)^{(1+\alpha)\gamma/(\alpha-\gamma)} \ln(N-j) +$$

$$+ \frac{2}{\alpha N^\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha - \gamma} \right)^\alpha \left(\frac{j+1}{j-1} \right)^{\alpha\gamma/(\alpha-\gamma)} + \frac{2}{1+\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha - \gamma} \right)^\alpha \frac{1}{N^\alpha} \left(\frac{j+5}{j-1} \right)^{(\alpha+1)\gamma/(\alpha-\gamma)},$$

справедливому при $t \in [(b/N)^{\alpha/(\alpha-\gamma)}, 1]$.

Если предположить, что $t \in [\varepsilon, 1]$, где $\varepsilon > 0$ – произвольное фиксированное число, то при $N \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$R_N[\Psi] = \frac{1 + o(1)}{2^\alpha(1+\alpha)} \left(\frac{\alpha}{\alpha - \gamma} \right)^\alpha \frac{\ln j + \ln(N-j))}{N^\alpha}.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4.2. Погрешность к.ф. (4.4) может быть оценена неравенством

$$R_N(t,\varphi) \le \sum_{k=0}^{j-2} \left| \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)}{\tau^\gamma(\tau-t)} d\tau \right| + \sum_{k=j+5}^{N-1} \left| \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)}{\tau^\gamma(\tau-t)} d\tau \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{s_{j-1}}^{s_{j+5}} \frac{\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)}{\tau^\gamma(\tau-t)} d\tau \right| = r_1 + r_2 + r_3. \qquad (4.8)$$

Из формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме следует, что на сегменте $[s_k, s_{k+1}]$

$$\varphi(\tau) - \varphi_N(\tau) = \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_{s_k}^{\tau} (\tau - t)^{r-1} \varphi^{(r)}(t) dt.$$

Поэтому

$$r_1 \le \sum_{k=0}^{j-2} \frac{1}{(s_j - s_{k+1}) s_k^\gamma} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} |\varphi(\tau) - \varphi_N(\tau)| d\tau \le$$

$$\le \frac{2^{r\gamma}}{(r+1)!} \left(\frac{r}{r-\gamma} \right)^{r+1} \frac{\ln j}{N^r} (1 + o(1)).$$

Аналогично оценивается сумма r_2:

$$r_2 \le \frac{1}{(r+1)!} \left(\frac{r}{r-\gamma} \right)^r \frac{1}{N^r} \left(\frac{j+2}{j+1} \right)^{(r+1)\gamma/(r-\gamma)} \ln(N^{r/(r-\gamma)} - (j+5)^{r/(r-\gamma)}).$$

Прежде чем приступить к оценке r_3, напомним, что при доказательстве теоремы 4.1 было показано, что для справедливости неравенства (4.7) достаточно выполнения неравенства $s_{j+5}^{-\gamma} > 3 \cdot 2^\gamma (s_{j+1} - s_{j-1})^\gamma / \gamma s_j^\gamma s_{j-1}^\gamma$. Простые подсчеты показывают, что это неравенство справедливо при $j \ge b_1 = 1 - 6\gamma^{-1/\gamma} r/(r-\gamma)$. Сохраняя обозначения,

использованные при доказательстве предыдущей теоремы, имеем

$$r_3 = \left| \int\limits_{s_{j-1}}^{s_{j+5}} \frac{\varphi(\tau) - \varphi_N(\tau)}{\tau^\gamma(\tau - t)} d\tau \right| \le \left| \int\limits_{\Delta} \frac{\varphi(\tau) - \varphi_N(\tau) - \varphi(t) - \varphi_N(t)}{\tau^\gamma(\tau - t)} d\tau \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{[s_{j-1}, s_{j+5}] \setminus \Delta} \frac{\varphi(\tau) - \varphi_N(\tau)}{\tau^\gamma(\tau - t)} d\tau \right| = r_3' + r_3''.$$

Слагаемые вида r_3'', по сути дела, оценивались выше и была доказана справедливость неравенства

$$r_3'' \le \frac{1}{(r+1)!} \left(\frac{r}{r-\gamma} \right)^{r+1} \frac{1}{N^r} \frac{(j+5)^{(r+1)\gamma/(r-\gamma)}}{(j+1)^{r\gamma/(r-\gamma)}((j+1)^{r/(r-\gamma)} - j^{r/(r-\gamma)})}.$$

Заметим, что

$$(\varphi(\tau) - \varphi_N(\tau)) - (\varphi(t) - \varphi_N(t)) = \frac{1}{(r-1)!} [\int\limits_{s_j}^{t} [(\tau - v)^{r-1} - (t-v)^{r-1}] \varphi^{(r)}(v) dv +$$

$$+ \int\limits_{t}^{\tau} (\tau - v)^{r-1} \varphi^{(r)}(v) dv].$$

Здесь предполагается, что $\tau > t$. Случай $t < \tau$ рассматривается аналогично. Переходя к модулям, имеем

$$|(\varphi(\tau) - \varphi_N(\tau)) - (\varphi(t) - \varphi_N(t))| \le \frac{1}{(r-2)!} (s_{j+5} - s_j)^{r-1} (\tau - t) +$$

$$+ \frac{1}{r!} (s_{j+5} - s_j)^{r-1} (\tau - t).$$

Теперь легко доказать справедливость оценки

$$r_3' \le \frac{2}{N^r} \left(\frac{j+5}{j-1} \right)^{r\gamma/(r-\gamma)} \left(\frac{r}{r-\gamma} \right)^r \left(\frac{1}{(r-2)!} + \frac{1}{r!} \right).$$

Собирая вместе оценки $r_1 - r_3$, имеем

$$R_N(t, \varphi) \le \frac{2^{r\gamma}}{(r+1)!} \left(\frac{r}{r-\gamma} \right)^{r+1} \frac{\ln j}{N^r} +$$

$$+ \frac{1}{(r+1)!} \left(\frac{r}{r-\gamma} \right)^r \frac{1}{N^r} \left(\frac{j+2}{j+1} \right)^{(r+1)\gamma/(r-\gamma)} \ln(N^{r/(r-\gamma)} - (j+5)^{r/(r-\gamma)}) +$$

$$+\frac{2}{N^r}\left(\frac{j+5}{j-1}\right)^{r\gamma/(r-\gamma)}\left(\frac{r}{r-\gamma}\right)^r\left(\frac{1}{(r-2)!}+\frac{1}{r!}\right)+$$

$$+\frac{1}{(r+1)!}\left(\frac{r}{r-\gamma}\right)^{r+1}\frac{1}{N^r}\frac{(j+5)^{(r+1)\gamma/(r-\gamma)}}{(j+1)^{r\gamma/(r-\gamma)}((j+1)^{r/(r-\gamma)}-j^{r/(r-\gamma)})}.$$

Эта оценка справедлива при $j \geq b_1$.

Можно показать, что при $t \in [(j/N)^{r/(r-\gamma)}, ((j+1)/N)^{r/(r-\gamma)})$ оценка снизу равна $R_N(t,\varphi) \asymp (\ln j + \ln(N-j))/N^r$. На доказательстве этого утверждения не останавливаемся, так как оно подобно приводимому в следующем разделе более сложному доказательству оценки снизу погрешности квадратурных формул на классе функций $W_p^r(1)$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4.3 практически не отличается от доказательства предыдущей теоремы. Единственное отличие, заключающееся в замене точности приближения отрезком ряда Тейлора на оценку приближения интерполяционным полиномом по узлам Чебышева, уже обсуждалось в разд. 2.1.

4.2. Оптимальные по порядку пассивные алгоритмы на классе $\mathbf{W_p^r}$

4.2.1. Формулировки теорем

Теорема 4.4 [29]. Пусть $\Psi = W_p^r(1)$ $(1 < p < \infty)$. Квадратурная формула (4.4), предназначенная для вычисления интеграла $S\varphi$ на сегменте $[(b_1/N)^{r/(r-\gamma)}, 1]$, $b_1 = 1 + 2\gamma^{-1/\gamma}\left(\frac{2}{r-\gamma}\right)$, является оптимальной по порядку среди всевозможных формул вида (4.2). Ее погрешность в предположении, что $(j/N)^{r/(r-\gamma)} \leq t < ((j+1)/N)^{r/(r-\gamma)}$, равна $R_N[\Psi] \asymp N^{-(r-r/(r-\gamma)p)}j^{-\gamma/(r-\gamma)p}$.

Доказательство. Прежде чем переходить к оценкам снизу, отметим изменения, которые следует сделать при определении погрешности к.ф. (4.4) на классе функций $W^rL_p(1)$ $(1 < p < \infty)$. Эти изменения, в первую очередь, касаются оценки разности $\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)$, которая будет в данном случае иметь вид

$$|\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)| \leq \frac{1}{(r-1)!(rq-q+1)^{1/q}}(\tau-s_k)^{r-1+1/q}||\varphi^{(r)}||_{L_p(\Delta_k)}.$$

Погрешность к.ф. (4.4) представима неравенством (4.8). С учетом лишь главного члена асимптотики имеем

$$r_1 = \sum_{k=0}^{j-2} | \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{\varphi(\tau) - \varphi_N(\tau)}{\tau^\gamma(\tau - t)} d\tau | \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{j-2} \frac{(s_{k+1} - s_k)^{r+1/q} ||\varphi^{(r)}||_{L_p(\Delta_k)}}{(s_j - s_{k+1}) s_k^\gamma (r + 1/q)(r-1)!} \frac{1}{(rq - q + 1)^{1/q}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(r+1/q)(r-1)!(rq-q+1)^{1/q}} \left(\frac{r}{r-\gamma}\right)^{r+1/q} \frac{1}{N^{r-r/(r-\gamma)p}} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{j-2} \frac{(k+1)^{\frac{\gamma}{r-\gamma}\frac{1}{q}}}{j^{r/(r-\gamma)} - (k+1)^{r/(r-\gamma)}} ||\varphi^{(r)}||_{L_p(\Delta_k)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(r+1/q)(r-1)!(rq-q+1)^{1/q}} \times$$

$$\times \frac{1}{(q-1)^{1/q} N^{r-r/(r-\gamma)p} (j^{r/(r-\gamma)} - (j-2)^{r/(r-\gamma)})^{1/p}} (\frac{r}{r-\gamma})^{r+1/q};$$

$$r_2 = \sum_{k=j+5}^{N-1} | \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{\varphi(\tau) - \varphi_N(\tau)}{\tau^\gamma(\tau - t)} d\tau | \leq \frac{1}{(r+1/q)(r-1)!(rq-q+1)^{1/q}} \times$$

$$\times \left(\frac{r}{r-\gamma}\right)^{r+1/q} (\frac{j+6}{j})^{\frac{\gamma}{r-\gamma}(r+1/q)} \frac{1}{N^{r-r/(r-\gamma)p}} \sum_{k=j+5}^{N-1} \frac{k^{\frac{\gamma}{r-\gamma}\frac{1}{q}} ||\varphi^{(r)}||_{L_p(\Delta_k)}}{k^{r/(r-\gamma)} - (j+1)^{r/(r-\gamma)}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(r+1/q)(r-1)!(rq-q+1)^{1/q}(q-1)^{1/q}} \left(\frac{r}{r-\gamma}\right)^{r} \frac{1}{N^{r-r/(r-\gamma)p}} \times$$

$$\times \left(\frac{j+6}{j}\right)^{\frac{\gamma}{r-\gamma}(r+1/q)} \frac{1}{((j+5)^{r/(r-\gamma)} - (j+1)^{r/(r-\gamma)})^{1/p}}.$$

Как и при рассмотрении предыдущего случая, легко показать, что

$$r_3' \leq \left[\frac{r^2 - 1/p}{r!(r-1/p)}\right] \left(\frac{r}{r-\gamma}\right)^{r-1/p} \left(\frac{j+5}{j}\right)^{\frac{r\gamma}{r-\gamma}} \frac{1}{N^{r-r/(r-\gamma)p}(j+5)^{\gamma/(r-\gamma)p}};$$

$$r_3' \leq \frac{1}{(r+1/q)(r-1)!(rq-q+1)^{1/q} j^{\gamma/(r-\gamma)p}} \left(\frac{r}{r-\gamma}\right)^{r-\frac{1}{p}} \times$$

$$\times \left(\frac{j+5}{j}\right)^{\frac{\gamma(rq+1)}{(r-\gamma)q}(r+\frac{1}{q})} \frac{1}{N^{(r-\gamma)p}}.$$

Собирая оценки $r_1 - r_3$, получим оценку погрешности к.ф. (4.4). Так как полученная оценка очень громоздка, то запишем ее в слабой асимптотике: $R_N[\Psi] \asymp \dfrac{1}{N^{r-r/(r-\gamma)p} j^{\gamma/(r-\gamma)p}}$. Отсюда следует, что если $j = O(N)$, то $R_N[\Psi] \asymp \dfrac{1}{N^{r-1/p}}$. Эта оценка совпадает с величиной погрешности квадратурных формул вычисления сингулярных интегралов на классе функций $W_p^r(1)$ (при отсутствии весовых функций).

Перейдем к оценке снизу. Разобъем сегмент $[0,1]$ на $2(N+1)$ частей точками $v_k = \left(\dfrac{k}{2(N+1)}\right)^{r/(r-\gamma)}$, $k = 0, 1, \ldots, 2N+2$ и возьмем $t = v_{\bar{k}}$. На отмеченных интервалах, лежащих правее точки $v_{\bar{k}+1}$, определим функцию $\varphi^*(\tau)$ формулой

$$\varphi^*(\tau) = A(v_{k+1} - v_k)^{-r} N^{-r(p-1)/(r-\gamma)p} \frac{[(\tau - v_k)(v_{k+1} - \tau)]^r}{\tau - t}$$

при $v_k \le \tau < v_{k+1}$. При остальных значениях τ $\varphi^*(\tau) = 0$. Коэффициент A подбирается из условия, чтобы $||\varphi^{*(r)}||_{L_p} \le 1$. Покажем, что такая константа существует. Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что норма функции $\psi(\tau)$, равной $(v_{k+1} - v_k)^{-r} N^{\frac{-r(p-1)}{(r-\gamma)p}} \dfrac{(\tau - v_k)^r}{\tau - t}$ на сегменте $[v_k, v_{k+1}]$, является константой, не зависящей от N. В самом деле,

$$||\psi(\tau)||_p = [\sum_{k=\bar{k}+1}^{2N-1}{}' \int_{v_k}^{v_{k+1}} |(v_{k+1} - v_k)^{-r} N^{\frac{-r(p-1)}{(r-\gamma)p}} \frac{(\tau - v_k)^r}{\tau - t}|^p d\tau]^{1/p} =$$

$$= [\sum_{k=\bar{k}+1}^{2N-1}{}' N^{-\frac{r}{(r-\gamma)}(p-1)} \frac{(v_{k+1} - v_k)^{-rp}}{|v_k - v_{\bar{k}}|^p} \int_{v_k}^{v_{k+1}} (\tau - v_k)^{rp} d\tau]^{1/p} =$$

$$= [\sum_{k=\bar{k}+1}^{2N-1}{}' \frac{(v_{k+1} - v_k)^{-rp}}{|v_k - v_{\bar{k}}|^p (rp+1)} N^{-\frac{r}{(r-\gamma)}(p-1)} (v_{k+1} - v_k)^{rp+1}]^{1/p} =$$

$$= \left[\frac{1}{rp+1} \sum_{k=\bar{k}+1}^{2N-1}{}' \left(\frac{r}{r-\gamma}\right) \frac{(k+1)^{\frac{\gamma}{r-\gamma}}}{(k^{r/(r-\gamma)} - \bar{k}^{r/(r-\gamma)})^p}\right]^{1/p} = B.$$

Здесь $\sum'$ означает суммирование по отмеченным сегментам.

Подставим функцию $\varphi^*(\tau)$ в интеграл $S\varphi$ при $t = v_{\bar{k}}$. В результате имеем

$$S\varphi^* = \int\limits_0^1 \frac{\varphi^*(\tau)d\tau}{\tau^\gamma(\tau - t)} = \sum_{k=\bar{k}+1}^{2N-1} \int\limits_{v_k}^{v_{k+1}} \frac{\varphi^*(\tau)d\tau}{\tau^\gamma(\tau - t)} =$$

$$= AN^{-\frac{r(p-1)}{(r-\gamma)p}} \sum_{k=\bar{k}+1}^{2N-1}{}'(v_{k+1} - v_k)^{-r} \int\limits_{v_k}^{v_{k+1}} \frac{[(\tau - v_k)(v_{k+1} - \tau)]^r}{\tau^\gamma(\tau - t)^2} d\tau \geq$$

$$\geq AA_1 N^{-\frac{r(p-1)}{(r-\gamma)p}} \sum_{k=\bar{k}+1}^{2N-1} \frac{(v_{k+1} - v_k)^{r+1}}{v_{k+1}^\gamma (v_{k+1} - v_{\bar{k}})^r} = AA_2 N^{-\frac{r(p-1)}{(r-\gamma)p}} \times$$

$$\times \sum_{k=\bar{k}+1}^{2N-1} \frac{k^{\frac{\gamma}{r-\gamma}(r+1)}}{(k+1)^{\gamma r/(r-\gamma)}((k+1)^{r/(r-\gamma)} - \bar{k}^{r/(r-\gamma)})^2 N^{r-r/(r-\gamma)}} = \frac{AA_3}{N^{r-r/p(r-\gamma)}}.$$

Оценка снизу получена. Из сопоставления с оценкой погрешности к.ф. (4.4) следует справедливость теоремы.

5. Оптимальные методы восстановления сопряженных функций

5.1. Вспомогательные утверждения

Рассмотрим сингулярный интеграл

$$G(t) = (Kg)(t) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{g(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad -1 < t < 1, \tag{5.1}$$

в котором на функцию $g(\tau)$ наложены следующие условия: $g(-1) = g(1) = 0,\ g(\tau) \in W^r(1),\ t \in \Omega = [-1, 1]$.

Лемма 5.1 [45]. Пусть функция $g(t)$ удовлетворяет условиям: $g(-1) = g(1) = 0,\ g(\tau) \in H_1(1)$. Тогда в интервале $(-1, 1)$ $|G(t_1) - G(t_2)| \leq A|t_1 - t_2||\ln|t_1 - t_2||$ при $t_1 \neq t_2$, т.е. $\omega(G, \delta) = \delta|\ln\delta|$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что при всех t $(-1 < t < 1)$ справедлива формула

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{g(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int\limits_{-1}^{1} \frac{g(\tau) - g(t)}{\tau - t} d\tau + g(t) \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\tau}{\tau - t},$$

причем при $t = \pm 1$ последнее слагаемое в правой части равно нулю.

Повторяя доказательство теоремы Привалова ([63], с. 56-59), убеждаемся, что функция $G_1(t) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{g(\tau) - g(t)}{\tau - t} d\tau$ удовлетворяет неравенству $|G_1(t_1) - G_1(t_2)| \leq A|t_1 - t_2||\ln|t_1 - t_2||$.

Нетрудно видеть, что функция $G_2(t) = g(t)(\ln|1-t| - \ln|1+t|)$ также удовлетворяет неравенству

$$|G_2(t_1) - G_2(t_2)| \leq A|t_1 - t_2||\ln|t_1 - t_2||.$$

В самом деле, пусть $-1 < t_1 < t_2 < 0$. Для простоты обозначений рассмотрим функцию $G_3(t) = g(t)\ln|1+t|$.

Очевидно,

$$|G_3(t_1) - G_3(t_2)| = |g(t_2)\ln|1+t_2| - g(t_1)\ln|1+t_1|| \leq$$

$$\leq |g(t_2) - g(t_1)||\ln|1+t_2|| + |g(t_1)||\ln|1+t_2| - \ln|1+t_1|| \leq$$

$$\leq A|t_2 - t_1||\ln|1+t_2|| + |g(t_1) - g(-1)| \left| \frac{|t_2 - t_1|}{1 + t_1 + \theta(t_2 - t_1)} \right| \leq$$

$$\leq A|t_2 - t_1||\ln|t_2 - t_1|| + A \left| \frac{t_1 + 1}{1 + t_1 + \theta(t_2 - t_1)} \right| |t_2 - t_1| \leq$$

$$\leq A|t_2 - t_1||\ln|t_2 - t_1||.$$

Из полученных соотношений следует справедливость леммы.

Пусть $g(t) \in W^r(1)$, $t \in \Omega = [-1, 1]$, $r \geq 2$, $g(-1) = g(1) = 0$.

Лемма 5.2 [45]. Пусть $g(t) \in W^r(1)$, $t \in \Omega = [-1, 1]$, $r \geq 2$, $g(-1) = g(1) = 0$. Функция $G(t)$, определяемая интегралом (5.1), принадлежит классу $Q^*_{r,0,1,r-1}(\Omega, M)$.

Доказательство. Последовательно дифференцируя функцию $G(t)$, имеем при $-1 < t < 1$

$$G'(t) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{d}{dt}\left(\frac{g(\tau)}{\tau - t}\right) d\tau = -\int\limits_{-1}^{1} g(\tau)\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\tau - t}\right) d\tau =$$

$$= -g(\tau)\frac{1}{\tau - t}\bigg|_{-1}^{1} + \int\limits_{-1}^{1} \frac{g'(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int\limits_{-1}^{1} \frac{g'(\tau)}{\tau - t} d\tau;$$

$$G''(t) = g'(\tau)\frac{1}{\tau - t}\Big|_{-1}^{1} - \int\limits_{-1}^{1} \frac{g''(\tau)}{\tau - t} d\tau;$$

. . . . . .

$$G^{(r)}(t) = g(1)\frac{(r-2)!}{(1-t)^{r-1}} + (-1)g(-1)\frac{(r-2)!}{(1+t)^{r-1}} + \cdots +$$

$$+(-1)^{r-1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{g^{(r)}(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

Лемма доказана.

Теорема 5.1 [45]. Пусть $\Omega = [-1, 1]$. Справедливы оценки

$$\delta_N(Q^*_{r,0,1,r-1}(\Omega, M)) \asymp d_N(Q^*_{r,0,1,r-1}(\Omega, M)) \asymp N^{-r}.$$

Доказательство. Оценка $\delta_N(Q^*_{r,0,1,r-1}(\Omega, M)) \geq AN^{-r}$ следует из того, что класс функций W^r вложен в класс $Q^*_{r,0,1,r-1}(\Omega, M)$, и из оценки $\delta_N(W^r(M)) \asymp N^{-r}$ поперечников Бабенко на классе W^r (см.[145]).

Построим непрерывный локальный сплайн, оценка погрешности которого равна AN^{-r}. Разобъем сегмент $[-1, 1]$ на $2N$ частей точками $t_k = -1 + (k/N)^v,\ \tau_k = 1 - (k/N)^v,\ k = 1, 2, \ldots, N,\ v = r$. Обозначим через $\xi_k (k = 1, 2, \ldots, r)$ нули полинома Лежандра степени r на сегменте $[-1, 1]$. Отобразим сегмент $[\xi_1, \xi_r]$ на сегмент $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$ (аналогично, на сегмент $\Delta^*_k = [\tau_{k+1}, \tau_k]$), $k = 1, 2, \ldots, N-1$. Узлы, полученные в результате отображения, обозначим через $\xi^k_1, \ldots, \xi^k_r$ $(\xi^{*k}_1, \ldots, \xi^{*k}_r)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Полином степени $r-1$, интерполирующий функцию $f(t)$ в сегменте Δ_k по узлам $\xi^k_1, \ldots, \xi^k_r$, обозначим через $L_r(f, \Delta_k)$. Аналогичным образом вводятся полиномы $L_r(f, \Delta^*_k)$.

Разделим сегмент $[-1, t_1]$ на $M = [\ln N]$ равных частей точками $v_k = -1 + k/N^v M,\ k = 0, 1, \ldots, M$ и введем сегменты $\Delta_{0,l},\ l = 0, 1, \ldots, M-1$. На каждом сегменте $\Delta_{0,l}$ построим интерполяционный полином $L_r(f, \Delta_{0,l})$, $l = 0, 1, \ldots, M-1$. Аналогичным образом построим полиномы $L_r(f, \Delta^*_{0,l})$, $l = 0, 1, \ldots, M-1$, на сегменте $[\tau_1, 1]$. Локальный сплайн, составленный из полиномов $L_r(f, \Delta_{0,l})$, $L_r(f, \Delta^*_{0,l})$, $l = 0, 1, \ldots, M-1$, $L_r(f, \Delta_k)$, $L_r(f, \Delta^*_k)$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$, обозначим через $f_r(t)$. Оценим величину $\|f - f_r\|_{C[-1,1]}$. На сегменте $\Delta_{0,l}$ (аналогич-

но, на сегменте $\Delta^*_{0,l}$), $l = 0, 1, \ldots, M$,

$$\|f(t) - L_r(f, \Delta_{0,l})\|_C \le A\omega\left(f, \frac{1}{N^v M r}\right)\lambda_r \le A\frac{1}{N^v M}\ln(N^v M) \le A\frac{1}{N^v},$$

где λ_r—константа Лебега. На сегментах Δ_k (аналогично, на сегментах Δ^*_k), $k = 1, 2, \ldots, N-1$,

$$|f(t) - f_r(t)| \le A\max_{t\in\Delta_k}|f^{(r)}(t)|\left(\left(\frac{k+1}{N}\right)^v - \left(\frac{k}{N}\right)^v\right)^r \le$$

$$\le A\left(\frac{N}{k}\right)^{v(r-1)}\frac{k^{(v-1)r}}{N^{vr}} \le \frac{A}{N^r}.$$

Таким образом, $\|f - f_r\|_{C[-1,1]} \le AN^{-r}$. Так как сплайн f_r непрерывный, то $d_N(Q^*_{r,0,1,r-1}(\Omega, M)) \le AN^{-r}$. Из неравенства $\delta_N \le 2d_N$, приведенного в книге [145, с.20], и полученных выше оценок δ_N и d_N следует справедливость теоремы.

5.2. Сингулярные интегралы с ядрами Коши

Рассмотрим сингулярный интеграл вида

$$K\varphi = \int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau, \quad -1 < t < 1, \tag{5.2}$$

где $\varphi(\tau) \in W^r(1),\ \tau \in \Omega = [-1, 1]$.

В качестве метода вычисления будем использовать квадратурные формулы вида

$$K\varphi = \sum_{k=1}^{N} p_k(t)\varphi(t_k) + R_N(\varphi) \tag{5.3}$$

с произвольными весами $p_k(t)$ и узлами t_k $(-1 \le t_k \le 1)$, $k = 1, 2, \ldots, N$.

Построим оптимальные по порядку алгоритмы вычисления интегралов вида (5.2), которые оказываются более удобными при практическом применении, чем асимптотически оптимальные и оптимальные по порядку квадратурные формулы, приведенные в предыдущих параграфах.

Перейдем к вычислению сингулярных интегралов вида (5.2). Так как

$$K\varphi(t) = \int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = \int_{-1}^{1}\frac{g(\tau)}{\tau - t}d\tau - \left(\varphi(1) + \frac{1}{2}\varphi(-1)\right)\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| -$$

$$-\frac{\varphi(1)-\varphi(-1)}{2}\left(2+t\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|\right),$$

а, как показано в леммах 5.1 и 5.2, гладкость функции $G(t)$ значительно выше, чем гладкость функции $K\varphi(t)$, то естественно применить квадратурные формулы вида (5.3) к интегралу $\int\limits_{-1}^{1}\frac{g(\tau)}{\tau-t}d\tau$, а не к интегралу $\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$. Здесь $g(\tau)=\varphi(\tau)-\frac{\tau+1}{2}[\varphi(1)-\varphi(-1)]-\varphi(-1)$.

Построим теперь оптимальный по порядку алгоритм восстановления функции $G(t)$ на сегменте $[-1,1]$. При этом воспользуемся обозначениями, описанными при доказательстве теоремы 5.1. Обозначим через $\xi_k^{0,l},\ k=1,2,\ldots,r,\ l=0,1,\ldots,M-1,\ \xi_k^j,\ \xi_k^{*j},\ k=1,2,\ldots,r,\ j=0,1,\ldots,N-1,\ \xi_k^{*0,l},\ k=1,2,\ldots,r,\ l=0,1,\ldots,M-1$ узлы интерполяционных полиномов $L_r(G,\Delta_{0,l}),\ L_r(G,\Delta_k),\ L_r(G,\Delta_k^*),\ L_r(G,\Delta_{0,l}^*)$, $k=1,2,\ldots,N-1,\ l=0,1,\ldots,M-1$ соответственно. Сплайн, составленный из зтих интерполяционных полиномов, обозначим через $G_r(t)$.

В каждом узле $\xi_j^{0,l},\ \xi_j^k,\ \xi_j^{*k},\ \xi_j^{*0,l},\ j=1,2,\ldots,r,\ k=1,2,\ldots,N-1,\ l=0,1,\ldots,M-1$, вычислим $G(\xi_j^{0,l}),\ G(\xi_j^k),\ G(\xi_j^{*k}),\ G(\xi_j^{*0,l})$:

$$G(\xi_j^k)=\sum_{l=0}^{N-1}\int\limits_{w_l}^{w_{l+1}}P_r\left(\frac{g(\tau)-g(\xi_j^k)}{\tau-\xi_j^k},[w_l,w_{l+1}]\right)d\tau+$$

$$+g(\xi_j^k)\ln\left|\frac{1-\xi_j^k}{1+\xi_j^k}\right|+R_N(\xi_j^k), \tag{5.4}$$

где $w_l=-1+2l/N,\ l=0,1,\ldots,N$. Значения $G(\xi_j^{0,l}),\ G(\xi_j^{*k}),\ G(\xi_j^{*0,l})$, $j=1,2,\ldots,r,\ k=1,2,\ldots,N-1,\ l=0,1,\ldots,M-1$, вычисляются по аналогичным квадратурным формулам.

После того как вычислены значения функции $G(t)$ во всех точках $\xi_j^{0,l},\ \xi_j^k,\ \xi_j^{*k},\ \xi_j^{*0,l},\ j=1,2,\ldots,r,\ k=1,2,\ldots,N-1,\ l=0,1,\ldots,M-1$, функция $G(t)$ восстанавливается локальным сплайном $G_r(t)$, построенным по значениям $G(t)$ в узлах $\xi_j^{0,l},\ \xi_j^k,\ \xi_j^{*k},\ \xi_j^{*0,l},\ j=1,2,\ldots,r,\ k=1,2,\ldots,N-1,\ l=0,1,\ldots,M-1$.

Теорема 5.2 [45]. Среди всевозможных методов восстановления функции $G(t)$ при $t \in [-1,1]$ на классе $W^r(1)$, использующих rN значений подынтегральной функции, оптимальным по порядку является метод, основанный на вычислении значений $G(\xi_j^{0,l})$, $G(\xi_j^k)$, $G(\xi_j^{*k})$, $G(\xi_j^{*0,l})$, $j = 1,2,\ldots,r,\ k = 1,2,\ldots,N-1,\ l = 0,1,\ldots,M-1$ по квадратурной формуле (5.4) и восстановлении сопряженной функции $G(t)$ локальным сплайном $G_r(t)$, построенным по узлам $\xi_j^{0,l}$, ξ_j^k, ξ_j^{*k}, $\xi_j^{*0,l}$, $j = 1,2,\ldots,r,\ k = 1,2,\ldots,N-1,\ l = 0,1,\ldots,M-1$. Погрешность этого алгоритма оценивается неравенством

$$\|G(t) - G_r(t)\|_{C[-1,1]} \le \frac{A \ln N}{N^r}.$$

Доказательство. Вначале оценим погрешность квадратурной формулы (5.4). Эта погрешность оценивается неравенством

$$|R_N(\xi_j^k)| \le \sum_{l=0}^{N-1} \left| \int\limits_{w_l}^{w_{l+1}} R_r\left(\frac{\varphi(\tau) - \varphi(\xi_j^k)}{\tau - \xi_j^k}, [w_l, w_{l+1}]\right) d\tau \right|, \qquad (5.5)$$

где

$$R_r\left(\frac{\varphi(\tau) - \varphi(\xi_j^k)}{\tau - \xi_j^k}\right) = \frac{\varphi(\tau) - \varphi(\xi_j^k)}{\tau - \xi_j^k} - P_r\left(\frac{\varphi(\tau) - \varphi(\xi_j^k)}{\tau - \xi_j^k}\right).$$

Здесь нужно оценить отдельно интегралы, отвечающие двум случаям:
а)точка ξ_j^k не лежит в интервале интегрирования,
б)точка ξ_j^k лежит в интервале интегрирования.

В первом случае

$$r_l = \left| \int\limits_{w_l}^{w_{l+1}} R_r\left(\frac{\varphi(\tau) - \varphi(\xi_j^k)}{\tau - \xi_j^k}, [w_l, w_{l+1}]\right) d\tau \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{w_l}^{w_{l+1}} R_r\left(\left(\varphi(\tau) - \varphi(\xi_j^k) - \frac{\varphi'(\xi_j^k)}{1!}(\tau - \xi_j^k) - \cdots - \frac{\varphi^{(r-1)}(\xi_j^k)}{(r-1)!}(\tau - \xi_j^k)^{r-1}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{\tau - \xi_j^k}, [w_l, w_{l+1}]\right) d\tau \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{w_l}^{w_{l+1}} R_r \left(\frac{\frac{1}{(r-1)!} \int\limits_{\xi_j^k}^{\tau} \varphi^{(r)}(v)(\tau - v)^{r-1} dv}{\tau - \xi_j^k}, [w_l, w_{l+1}] \right) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(r-1)!} \frac{2^r r!(w_{l+1} - w_l)^{r+1}}{(2r)!} \max_{w_l \leq \tau \leq w_{l+1}} \left| \left(\frac{1}{\tau - \xi_j^k} \int\limits_{\xi_j^k}^{\tau} \varphi^{(r)}(v)(\tau - v)^{r-1} dv \right)^{(r)} \right| \leq$$

$$\leq A(w_{l+1} - w_l)^{r+1} \max \left(\frac{1}{|w_l - \xi_j^k|}, \frac{1}{|w_{l+1} - \xi_j^k|} \right) \leq A \frac{1}{N^r} \frac{1}{|l-k|}. \qquad (5.6)$$

Аналогичные оценки имеют место при различных расположениях узлов $\xi_j^{0,l}$, ξ_j^k, ξ_j^{*k}, $\xi_j^{*0,l}$ и сегментов $\Delta_{0,l}$, Δ_k, Δ_k^*, $\Delta_{0,l}^*$.

Во втором случае

$$\left| \int\limits_{w_j}^{w_{j+1}} R_r \left(\frac{\varphi(\tau) - \varphi(\xi_k^j)}{\tau - \xi_k^j}, [w_l, w_{l+1}] \right) d\tau \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{w_j}^{w_{j+1}} R_r \left(\left(\varphi(\tau) - \varphi(\xi_k^j) - \frac{\varphi'(\xi_k^j)}{1!}(\tau - \xi_k^j) - \dots - \frac{\varphi^{(r-1)}(\xi_k^j)}{(r-1)!}(\tau - \xi_k^j)^{r-1} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{\tau - \xi_k^j}, [w_l, w_{l+1}] \right) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(r-1)!} \left| \int\limits_{w_j}^{w_{j+1}} R_r \left(\frac{1}{\tau - \xi_k^j} \int\limits_{\xi_k^j}^{\tau} \varphi^{(r)}(v)(\tau - v)^{r-1} dv, [w_l, w_{l+1}] \right) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \frac{2^r r!}{(r-1)!(2r)!} \sum_{i=0}^{r-1} C_{r-1}^i \frac{(r-1)!}{(r-i)} (w_{j+1} - w_j)^r =$$

$$= \frac{2^r r!}{(2r)!} \sum_{i=0}^{r-1} \frac{C_{r-1}^i}{(r-i)} \left(\frac{1}{N} \right)^r = \frac{A}{N^r}. \qquad (5.7)$$

Подставляя (5.6) и (5.7) в (5.5), получаем $|R_N(\varphi)| \leq AN^r \ln N$.

После того, как по квадратурной формуле (5.4) вычислены значения сингулярного интеграла $G(t)$ в узлах $\xi_j^{0,l}$, ξ_j^k, ξ_j^{*k}, $\xi_j^{*0,l}$, $j = 1, 2, \ldots, r$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$, $l = 0, 1, \ldots, M-1$, приступаем к построению локального сплайна. Это построение было описано выше при доказательстве теоремы 5.1. Из приведенных там оценок следует, что если бы значения функции $G(\xi_j^{0,l})$, $G(\xi_j^k)$, $G(\xi_j^{*k})$, $G(\xi_j^{*0,l})$, $j = 1, 2, \ldots, r$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$, $l = 0, 1, \ldots, M-1$, были вычислены точно, то погрешность восстановления локальным сплайном функции $G(t)$ на сегменте $[-1, 1]$ оценивалась величиной AN^{-r}. Так как значения $G(\xi_j^{0,l})$, $G(\xi_j^k)$, $G(\xi_j^{*k})$, $G(\xi_j^{*0,l})$, $j = 1, 2, \ldots, r$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$, $l = 0, 1, \ldots, M-1$, вычислены с точностью $AN^{-r} \ln N$, то это дает дополнительную погрешность $A\lambda_r N^{-r} \ln N$, где $\lambda_r = Ar-$ константа Лебега, возникающая при интерполировании по r узлам полинома Лежандра.

Таким образом, оценка восстановления функции $G(t)$ на сегменте $[-1, 1]$ имеет погрешность $AN^{-r} \ln N$, т.е. алгоритм является оптимальным по порядку.

Теорема доказана.

ГЛАВА 4

МНОГОМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Интегралы со степенной особенностью

1.1. Пассивные алгоритмы на классах $\mathbf{W^{r,s}H}_{\omega,\omega}$ и $\mathbf{W^{r,s}_p}$

Исследуем методы вычисления интегралов

$$K\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(\sigma_1,\sigma_2)\left|\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\right|^{\gamma_1}\left|\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2-s_2}{2}\right|^{\gamma_2} d\sigma_1 d\sigma_2, \tag{1.1}$$

$0 \le s_1, s_2 \le 2\pi$;

$$F\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\varphi(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2}{(\sin^2\frac{\sigma_1-s_1}{2}+\sin^2\frac{\sigma_2-s_2}{2})^{\lambda}},$$

$0 \le s_1, s_2 \le 2\pi$;

$$T\varphi = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{\lambda}},$$

$-1 \le t_1, t_2 \le 1$.

Для вычисления интеграла (1.1) используются к.ф.

$$K\varphi = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} p_{kl}(s_1,s_2)\varphi(x_k,y_l) + R_{mn}(s_1,s_2,x_k,y_l,p_{kl},\varphi); \tag{1.2}$$

$$K\varphi = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=0}^{\rho_1}\sum_{j=0}^{\rho_2} p_{klij}(s_1,s_2)\varphi^{(i,j)}(x_k,y_l)+$$
$$+R_{mn}(s_1,s_2,x_k,y_l,p_{kl},\varphi), \tag{1.3}$$

определяемые векторами (X,Y,P) узлов $0 \le x_1 < x_2 < \cdots < x_m \le 2\pi$; $0 \le y_1 < y_2 < \cdots < y_n \le 2\pi$ и коэффициентов p_{kl}. Кроме к.ф. (1.2) и (1.3), для вычисления интеграла (1.1) будем использовать формулу

$$K\varphi = \sum_{k=1}^{N}\varphi(M_k)p_k(s_1,s_2) + R_N(s_1,s_2,M_k,p_k,\varphi), \tag{1.4}$$

где $M_k = (\xi_k,\eta_k)-$ узлы к.ф., $M_k \in [0,2\pi]^2$.

1.1.1. Формулировки теорем

Теорема 1.1 [29]. Среди к.ф. вида (1.2) асимптотически оптимальной на классах $H_{\omega_1,\omega_2}(D)$ и $H_3^{\omega}(D)$ является формула

$$K\varphi = \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{n-1}\varphi(t'_k,\tau'_l)\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\int\limits_{\tau_l}^{\tau_{l+1}}\left|\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\right|^{\gamma_1}\left|\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2-s_2}{2}\right|^{\gamma_2}d\sigma_1 d\sigma_2+$$

$$+R_{mn}(\varphi), \tag{1.5}$$

где $t_k = 2k\pi/m, t'_k = (2k+1)\pi/m, k = 0,1,\ldots,m, \tau_l = 2l\pi/n, \tau'_l = (2l+$ $+1)\pi/n, l = 0,1,\ldots,n$. Ее погрешность равна

$$R_{mn}\left(H_{\omega_1,\omega_2}\right) = \frac{4mn + O(mn^{\gamma_2} + nm^{\gamma_1})}{\cos(\gamma_1\pi/2)\cos(\gamma_2\pi/2)}\left[\frac{\pi}{n}\int\limits_0^{\pi/m}\omega_1(t)dt + \frac{\pi}{m}\int\limits_0^{\pi/n}\omega_2(t)dt\right],$$

$$R_{mn}\left(H_3^{\omega}(D)\right) = \frac{4mn + O(mn^{\gamma_2} + nm^{\gamma_1})}{\cos(\gamma_1\pi/2)\cos(\gamma_2\pi/2)}\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}\omega\left(\sqrt{t^2+\tau^2}\right)dtd\tau.$$

Обозначим через $l_{k_1k_2}(\varphi;[a,b;c,d]) = \sum\limits_{l_1=1}^{k_1}\sum\limits_{l_2=1}^{k_2}p_{l_1l_2}\varphi(t_{l_1},t_{l_2})$ асимптотически оптимальную на $W^{r,s}(1)$ к.ф., а через $\prod_{m,n}\left(\varphi^{(k,l)}(t_i,t_j)\right)$ – функционал, аппроксимирующий $\varphi^{(k,l)}(t_i,t_j)$ с точностью $O(m^{-2(r-k)}n^{-2(s-l)})$ и точный для полиномов $t_1^v t_2^{\omega}, v = 0,1,\ldots,r-1, \omega = 0,1,\ldots,s-1$. Функционалы $l_{k_1k_2}$ и $\prod_{m,n}$ построены в §3 главы 1.

Введем обозначения $t_k = 2k\pi/M, k = 0,1,\ldots,M, \Delta_{kl} = [t_k,t_{k+1};t_l,t_{l+1}]$, $M = [m/L], L = [\ln m]$, и сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1.2. Пусть $\Psi = \tilde{W}^{r,r}(1)$. Среди к.ф. вида (1.2) асимптотически оптимальной является формула

$$K\varphi = \sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{M-1}{}'l_{L,L}(\varphi,\Delta_{k,l})\left|\operatorname{ctg}\frac{t_k-s_1}{2}\right|^{\gamma_1}\left|\operatorname{ctg}\frac{t_l-s_2}{2}\right|^{\gamma_2}+$$

$$+\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{M-1}{}'\int\limits_{\Delta_{kl}}\int\prod_{mm}\left(T_{r-1}\varphi(t_k,t_l)\right)\left|\operatorname{ctg}\frac{\tau_1-s_1}{2}\right|^{\gamma_1}\left|\operatorname{ctg}\frac{\tau_2-s_2}{2}\right|^{\gamma_2}d\tau_1 d\tau_2+$$

$$+R_{NN}(\varphi),$$

где $T_r\varphi(t_k,t_l)=\varphi(t_k,t_l)+\frac{1}{1!}d\varphi(t_k,t_{k+l})+\dots+\frac{1}{r!}d^r\varphi(t_k,t_l),(s_1,s_2)\in$ $\in\Delta_{ij},\sum\sum'$ означает суммирование по $(k,l)\neq(i,j)$, имеющая погрешность

$$R_{NN}[\Psi]=(1+o(1))(4\pi K_r m^{-r})/\cos(\gamma_1\pi/2)\cos(\gamma_2\pi/2).$$

Пусть квадрат $D=[0,2\pi]^2$ покрыт N правильными шестиугольниками σ_k с центрами в точках M_k, являющимися сдвигами шестиугольника σ_0 с центром в точке $\theta=(0,0)$. Рассмотрим к.ф.

$$K\varphi=\sum_{k=1}^{N}\varphi(M_k)p_k(s_1,s_2)+R_N(\varphi),$$

где

$$p_k(s_1,s_2)=\int\limits_{\Delta_k}\int\left|\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\right|^{\gamma_1}\left|\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2-s_2}{2}\right|^{\gamma_2}d\sigma_1 d\sigma_2, \tag{1.6}$$

$\Delta_k=\sigma_k\cap D$.

Теорема 1.3 [29]. Среди квадратурные формулы вида (1.4) асимптотически оптимальной на классе $\Psi=H_3^{\omega}(D)$ является формула (1.6) с погрешностью

$$R_N[\Psi]=(1+o(1))N\frac{1}{\cos(\gamma_1\pi/2)\cos(\gamma_2\pi/2)}\int\limits_{\sigma_0}\int\omega(\rho(\sigma,\theta))d\sigma.$$

Теорема 1.4 [29]. Пусть интеграл $K\varphi$ вычисляется по к.ф. вида (1. 4). Справедливы оценки

$$\zeta_N[H_\iota^\alpha]\geq\frac{(1+o(1))D_i(2\pi)^{2+\alpha}}{\cos(\gamma_1\pi/2)\cos(\gamma_2\pi/2)N^{\alpha/2}}, \tag{1.7}$$

$$\zeta_N[Z_i^\alpha]\geq\frac{2+o(1)}{\cos(\gamma_1\pi/2)\cos(\gamma_2\pi/2)}D_i(2\pi)^{2+\alpha}\frac{1}{N^{\alpha/2}}. \tag{1.8}$$

Здесь

$$D_1=2^{1-\alpha}/(2+\alpha);D_2=2^{1-\alpha/2}/(2+\alpha);D_3=12(2\sqrt{3})^{-(2+\alpha)/2}/(2+\alpha).$$

Построим асимптотически оптимальные к.ф. на классах функций H_ι^α, $i=1,2,3$.

Пусть интеграл $K\varphi$ вычисляется по формуле

$$K\varphi = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} \varphi(t'_k, \tau'_l) \int\limits_{\Delta_{kl}}\int \left|\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1 - s_1}{2}\right|^{\gamma_1} \left|\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2 - s_2}{2}\right|^{\gamma_2} d\sigma_1 d\sigma_2 +$$

$$+R_N(\varphi), \tag{1.9}$$

где $t'_k = \tau'_k = (2k+1)\pi/n, t_k = 2k\pi/n, N = n^2, \Delta_{kl} = [t_k, t_{k+1}; t_l, t_{l+1}]$.

Теорема 1.5 [29]. Среди всевозможных квадратурных формул вида (1.4) формула (1.9) является асимптотически оптимальной на классе $\Psi = H_1^\alpha, (0 < \alpha \le 1)$. Ее погрешность равна $R_N[\Psi] = 2^3\pi^{2+\alpha}(1+o(1))/(2+\alpha)\cos(\gamma_1\pi/2)\cos(\gamma_2\pi/2)N^{\alpha/2}$.

Рассмотрим кубатурную формулу

$$K\varphi = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} \left[\varphi(\xi_k, \eta_l) \int\limits_{g_{kl}}\int \left|\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1 - s_1)}{2}\right|^{\gamma_1} \left|\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2 - s_2}{2}\right|^{\gamma_2} d\sigma_1 d\sigma_2 +\right.$$

$$\left. +\varphi(\xi'_k, \eta'_l) \int\limits_{g'_{kl}}\int \left|\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1 - s_1)}{2}\right|^{\gamma_1} \left|\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2 - s_2}{2}\right|^{\gamma_2} d\sigma_1 d\sigma_2\right] + R_N(\varphi). \tag{1.10}$$

Здесь $N = 2n^2; (\xi_k, \eta_l) = (2\pi k/n, 2\pi l/n); (\xi'_k, \eta'_l) = ((2k+1)\pi/n), (2l+ +1)\pi/n); g_{kl} = r_{kl} \cap D; g'_{kl} = r'_{kl} \cap D$; r_{kl} и r'_{kl}– множества точек, определяемых неравенствами

$$|\sigma_1 - \xi_k| + |\sigma_2 - \eta_l| \le \pi/n; \quad |\sigma_1 - \xi'_k| + |\sigma_2 - \eta'_2| \le \pi/n.$$

Теорема 1.6 [29]. Среди всевозможных квадратурных формул вида (1.4) формула (1.10) является асимптотически оптимальной на классе $\Psi = H_2^\alpha (0 < \alpha \le 1)$. Ее погрешность

$$R_N[\Psi] = 2^{3+\alpha/2}\pi^{2+\alpha}(1+o(1))/(2+\alpha)\cos(\gamma_1\pi/2)\cos(\gamma_2\pi/2)N^{\alpha/2}.$$

1.2. Оптимальные методы вычисления интегралов вида Fφ

Интеграл $F\varphi$ будем вычислять по кубатурным формулам вида

$$Ff = \sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=1}^{n_2}\sum_{l_1=0}^{\rho_1}\sum_{l_2=0}^{\rho_2} p_{k_1k_2l_1l_2}(s_1, s_2) f^{(l_1,l_2)}(x_{k_1}, x_{k_2}) +$$

$$+R_{n_1n_2}(s_1,s_2;p_{k_1k_2l_1l_2};x_{k_1},x_{k_2};f) \tag{1.11}$$

и

$$Ff=\sum_{k=1}^{N}p_k(s_1,s_2)f(M_k)+R_N(s_1,s_2;p_k;M_k;f) \tag{1.12}$$

на классах функций Гельдера и Соболева.

Формулировки теорем

Теорема.1.7 [165]. Пусть $\Psi=H_{\omega_1,\omega_2}(D)$ или $\Psi=H_\omega(D)$ и интеграл $F\varphi$ вычисляется по к.ф. вида (1.11) при $\rho_1=\rho_2=0$. Тогда справедлива оценка

$$\zeta_{n_1n_2}[\Psi]\geq\frac{C}{\pi^2}n_1n_2[q\int\limits_0^h\omega_1(t)dt+h\int\limits_0^q\omega_2(t)dt],$$

где $q=\frac{\pi}{n_2}$, $h=\frac{\pi}{n_1}$, $C=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{ds_1ds_2}{(\sin^2(s_1/2)+\sin^2(s_2/2))^\lambda}$.

Следствие. Пусть $\Psi=H_{\alpha\alpha}(D)$ или $\Psi=H_\alpha(D)$ и интеграл $F\varphi$ вычисляется по кубатурным формулам вида (1.11) при $n_1=n_2=n$ и $\rho_1=\rho_2=0$. Тогда справедлива оценка

$$\zeta_{nn}[\Psi]\geq\frac{2C\pi^\alpha}{(1+\alpha)n^\alpha}.$$

Теорема 1.8 [165]. Пусть $\Psi=H_i^\alpha$ или $\Psi=Z_i^\alpha$, $i=1,2,3$, и интеграл $F\varphi$ вычисляется по кубатурным формулам вида (1.12).

Тогда

$$\zeta_N[H_i^\alpha]=2\zeta_N[Z_i^\alpha]=(1+o(1))C(4\pi^2)^{2/\alpha}D_iN^{-\alpha/2},$$

где $D_1=\frac{12}{2+\alpha}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^{(\alpha+2)/2}\int\limits_0^{\pi/6}\frac{d\varphi}{\cos^{2+\alpha}\varphi}$. $D_2=\frac{2}{2^\alpha(2+\alpha)}$, $D_3=\frac{2^{1-\alpha/2}}{2+\alpha}$, $C=$ $=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{ds_1ds_2}{(\sin^2(s_1/2)+\sin^2(s_2/2))^\lambda}$.

Теорема 1.9 [165]. Пусть $\Psi=\tilde{C}_2^r(1)$ и интеграл $F\varphi$ вычисляется по кубатурным формулам вида (1.11) при $\rho_1=\rho_2=0$. Тогда при $n_1=n_2=n$ справедлива оценка

$$\zeta_{nn}[\Psi]\geq(1+o(1))\frac{2CK_r}{n^r},$$

где K_r- константа Фавара.

Теорема 1.10 [165]. Пусть $\Psi = W_p^{r,r}(1)$, $r = 1, 2, \ldots,$ $1 \le p \le \infty$, интеграл $F\varphi$ вычисляется по кубатурной формуле (1.11) при $\rho_1 = \rho_2 = r - 1$ и $n_1 = n_2 = n$. Тогда справедлива оценка

$$\zeta_{nn}[\Psi] \ge (1 + o(1)) \frac{2^{1/q} \pi^{r-1/p} R_{rq}(1)}{r!(rq+1)^{1/q}(n - 1 + [R_{rq}(1)]^{1/r})^r} \times$$

$$\times \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{ds_1 ds_2}{(\sin^2(s_1/2) + \sin^2(s_2/2))^\lambda},$$

где $R_{rq}(t)-$ полином степени r, наименее уклоняющийся от нуля в метрике пространства $L_q([-1, 1])$.

Введем следующие обозначения: $x_k = 2k\pi/n$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $\Delta_{kl} = [x_k, x_{k+1}, x_l, x_{l+1}]$, $k, l = 0, 1, \ldots, n-1$, $x'_k = (x_{k+1} + x_k)/2$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Пусть $(s_1, s_2) \in \Delta_{ij}$, $i, j = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда интеграл $F\varphi$ будем вычислять по кубатурной формуле

$$Ff = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} f(x'_k, x'_l) \int\int\limits_{\Delta_{kl}} \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{\left(\sin^2\left(\frac{\sigma - x'_i}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\sigma - x'_j}{2}\right)\right)^\lambda} + R_{nn}(f). \tag{1.13}$$

Теорема 1.11 [165]. Пусть $\Psi = H_{\alpha\alpha}(D), 0 < \alpha < 1$. Среди всевозможных кубатурных формул вида (1.11) при $\rho_1 = \rho_2 = 0$, асимптотически оптимальной является формула (1.13), имеющая погрешность

$$R_{nn}[\Psi] = \frac{(2 + o(1))C}{1 + \alpha} \left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha, \qquad \mathrm{C} = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\sigma_1 \mathrm{d}\sigma_2}{\left(\sin^2\frac{\sigma_1}{2} + \sin^2\frac{\sigma_2}{2}\right)^\lambda}.$$

Рассмотрим случай, когда $f \in \tilde{W}^{r,r}(1)$.

Теорема 1.12 [165]. Пусть $\Psi = \tilde{W}^{r,r}(1)$ и интеграл $F\varphi$ вычисляется по кубатурным формулам вида (1.11), где $\rho_1 = r - 1,\ \rho_2 = s - 1, n_1 = n_2 = n$. Тогда асимптотически оптимальной является кубатурная формула

$$K\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\varphi_{mn}(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2}{(\sin^2(\sigma_1 - s_1)/2 + \sin^2(\sigma_2 - s_2)/2)^\lambda} + R_{mn}(\varphi). \tag{1.14}$$

Опишем построение сплайна φ_{mn}. Разобьем стороны квадрата $\Omega = [0, 2\pi; 0, 2\pi]$ на n равных частей. Через Δ_{kl} обозначим прямоугольник $\Delta_{kl} = [2k\pi/n, 2(k+1)\pi/n; 2l\pi/n, 2(l+1)\pi/n], k, l = 0, 1, \ldots, n-1$. Пусть точка $(s_1, s_2) \in \Delta_{ij}$. Вначале аппроксимируем функцию $\varphi(\sigma_1, \sigma_2)$ по переменной σ_2 и построим сплайн $\varphi_n(\sigma_1, \sigma_2)$ по следующему правилу. Пусть σ_1- произвольное фиксированное число $(0 \le \sigma_1 \le 2\pi)$. На сегментах $[2k\pi/n, 2(k+1)\pi/n]$ при $k \ne j-2, \ldots, j+1$

$$\varphi_n(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{l=0}^{s-1} \left[\frac{\varphi^{(0,l)}(\sigma_1, 2k\pi/n)}{l!} (\sigma_2 - 2k\pi/n)^l + B_l \delta^{(l)}(\sigma_1, (k+1)/n) \right],$$

где

$$\delta(\sigma_1, \sigma_2) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2) - \sum_{l=0}^{s-1} \frac{\varphi^{(0,l)}(\sigma_1, 2k\pi/n)}{l!} (\sigma_2 - 2k\pi/n)^l.$$

Коэффициенты B_l определяются из равенства

$$(2(k+1)\pi/n - \sigma_2)^s - \sum_{l=0}^{s-1} \frac{B_l s!}{(s-l-1)!} \frac{2\pi}{n} \left(2\pi(k+1)/n - \sigma_2\right)^{s-l-1} =$$

$$= (-1)^s R_{s1} \left(2\pi(2k+1)/2n; \pi/n; \sigma_2\right),$$

где $R_{s1}(a, h, x)-$ полином степени s, наименее уклоняющийся от нуля в метрике пространства L на сегменте $[a-h, a+h]$. На сегменте $[2\pi(j-2)/n, 2\pi(j+2)/$ функция $\varphi_n(\sigma_1, \sigma_2)$ определяется отрезком ряда Тейлора

$$\varphi_n(\sigma_1, \sigma_2) = \varphi(\sigma_1, 2\pi j/n) + \frac{\varphi^{(0,1)}(\sigma_1, 2\pi j/n)}{1!} (\sigma_2 - j/n) + \cdots +$$

$$+ \frac{\varphi^{(0,s-1)}(\sigma_1, 2\pi j/n)}{(s-1)!} (\sigma_2 - 2\pi j/n)^{s-1}.$$

Аналогично по функции $\varphi_n(\sigma_1, \sigma_2)$ построим функцию $\varphi_{mn}(\sigma_1, \sigma_2)$.

Построим кубатурные формулы вычисления интегралов вида Ff на классах функций $\tilde{W}^{rr}(1)$, которые будут (в отличие от формулы, приведенной в формулировке теоремы 1.11) менее точны (но тем не менее оптимальны по порядку), но зато более удобны в применении.

Прежде всего исследуем гладкость функции

$$\psi(t_1, t_2) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{\left(\sin^2 \frac{\tau_1 - t_1}{2} + \sin^2 \frac{\tau_2 - t_2}{2}\right)^\lambda}$$

в предположении, что $f(t_1,t_2) \in \tilde{W}^{r,r}$. Сделав в последнем интеграле замену переменных, имеем

$$\psi(t_1,t_2) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{f(\tau_1+t_1,\tau_2+t_2)d\tau_1 d\tau_2}{\left(\sin^2\frac{\tau_1}{2}+\sin^2\frac{\tau_2}{2}\right)^{\lambda}}.$$

Отсюда видно, что $\psi(t_1,t_2) \in W^{r,r}$.

Замечание. Известно [145], что поперечники Бабенко и Колмогорова на классе функции $W^{r,r}(1)$ равны $\delta_n(W^{r,r}(1)) \asymp d_n(W^{r,r}(1),C) \asymp$ $\asymp \frac{1}{n^{r/2}}$. Следовательно, ни при каком алгоритме восстановления функции $\psi(t_1,t_2)$, использующем n функционалов, невозможно ее восстановление с точностью, большей, чем $O\left(\frac{1}{n^{r/2}}\right)$.

Таким образом, для восстановления функции $\psi(t_1,t_2)$, $(t_1,t_2) \in$ $\in [0,2\pi]^2$ с точностью $An^{-r/2}$ достаточно вычислить значение функции $\psi(t_1,t_2)$ в узлах сетки (v_k,v_l), $v_k = 2k\pi/N$, $k,l = 0,1,\ldots,N$, $N^2 = n$, и по этим узлам построить локальный сплайн $\psi_N(t_1,t_2)$ r-го порядка по каждой переменной.

Опишем построение этого сплайна.

Для простоты обозначений предположим, что M $(M = N/r)-$ целое число. Покроем область $[0,2\pi]^2$ квадратами $\Delta_{kl} = [w_k,w_{k+1},w_l,w_{l+1}]$, $k,l = 0,1,\ldots,M-1$, где $w_k = 2k\pi/M$, $k = 0,\ldots,M$. В каждой из областей Δ_{kl} функцию $\psi(t_1,t_2)$ будем аппроксимировать интерполяционным полиномом $\psi_N(t_1,t_2,\Delta_{kl})$, построенным по узлам (x_i^k,x_j^l), $i,j = 0,1,\ldots,r$, $x_i^k = w_k + \frac{2\pi}{Mr}i$, $i = 0,1,\ldots,r$.

Локальный сплайн, составленный из полиномов $\psi_N(t_1,t_2,\Delta_{kl})$, обозначим через $\psi_N(t_1,t_2)$.

Если значения $\psi(v_k,v_l)$ вычисляются по кубатурной формуле (1.14) с точностью $A(n^{-r/2})$, то

$$\|\psi(t_1,t_2) - \psi_N(t_1,t_2)\|_C \le An^{-r/2}.$$

Следовательно, сплайн $\psi_N(t_1,t_2)$ является оптимальным по порядку методом восстановления функции $\psi(t_1,t_2)$, имеющим погрешность $An^{-r/2}$ в равномерной метрике.

1.2. Доказательства теорем

Доказательства теорем 1.1 – 1.12 проводятся по той же схеме, что и доказательства подобных, но более сложно доказываемых теорем из разд. 2 этой главы.

Аналогичные результаты получены для интегралов с логарифмическими особенностями (см. [29]).

1.3. Оптимальные методы вычисления интегралов вида Tf

Интеграл Tf будем вычислять по кубатурным формулам

$$Tf = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{\rho_1}\sum_{j=0}^{\rho_2} p_{klij}(t_1,t_2) f^{(i,j)}(x_k,y_l) +$$

$$+R_{nm}(t_1,t_2;x_k,y_l;p_{klij};f), \tag{1.15}$$

$$Tf = \sum_{k=0}^{N-1} p_k(t_1,t_2) f(M_k) + R_N(t_1,t_2;M_k;p_k;f), \tag{1.16}$$

где $M_k, k = 0,1,\ldots,N-1-$ узлы кубатурной формулы (1.16), расположенные в квадрате $[-1,1]^2$.

Оценим снизу функционал ζ_{mn}.

Вначале оценим снизу погрешность кубатурных формул вида (1.15) (при $\rho_1 = \rho_2 = 0$ и $n_1 = n_2 = n$) на классах функций Гельдера.

Пусть $n-$ целое число, $L = [n/lnn]$. Введем узлы $v_k = -1 + 2k/L$, $k = 0,1,\ldots,L$. Обозначим через (ξ_k,ξ_l) сетку, являющуюся объединением узлов (x_i,y_j), $i,j = 1,2,\ldots,n$, кубатурной формулы (1.15) и узлов (v_i,v_j), $i,j = 1,2,\ldots,L$. Пусть $\Delta_{kl} = [v_k,v_{k+1};v_l,v_{l+1}]$, $k,l = 0,1,\ldots,L-1$. Введем неотрицательную функцию $\psi(t_1,t_2)$, принадлежащую классу $H_{\alpha\alpha}(D)$, $D = [-1,1]^2$ и обращающуюся в нуль в узлах (ξ_k,ξ_l), $k,l = 0,1,\ldots,N$, где $N = n + L$.

Рассмотрим интеграл

$$(T\psi)(v_i,v_j) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\psi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-v_i)^2+(\tau_2-v_j)^2)^\lambda} =$$

$$= \left(\sum_{k=i}^{L-1}\sum_{l=j}^{L-1} + \sum_{k=i}^{L-1}\sum_{l=0}^{j-1} + \sum_{k=0}^{i-1}\sum_{l=j}^{L-1} + \sum_{k=0}^{i-1}\sum_{l=0}^{j-1}\right) \times$$

$$\times \int\int\limits_{\Delta_{kl}} \frac{\psi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-v_i)^2+(\tau_2-v_j)^2)^\lambda} \geq$$

$$\geq \sum_{k=0}^{L-i-1}\sum_{l=0}^{L-j-1}\left(\frac{L}{2}\right)^{2\lambda}\frac{1}{((k+1)^2+(l+1)^2)^\lambda}\int\int\limits_{\Delta_{k+i,l+j}} \psi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+$$

$$+\sum_{k=0}^{L-i-1}\sum_{l=0}^{j-1}\left(\frac{L}{2}\right)^{2\lambda}\frac{1}{((k+1)^2+(l+1)^2)^\lambda}\int\int\limits_{\Delta_{k+i,j-l-1}} \psi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+$$

$$+\sum_{k=0}^{i-1}\sum_{l=0}^{L-j-1}\left(\frac{L}{2}\right)^{2\lambda}\frac{1}{((k+1)^2+(l+1)^2)^\lambda}\int\int\limits_{\Delta_{i-k-1,j+l}} \psi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+$$

$$+\sum_{k=0}^{i-1}\sum_{l=0}^{j-1}\left(\frac{L}{2}\right)^{2\lambda}\frac{1}{((k+1)^2+(l+1)^2)^\lambda}\int\int\limits_{\Delta_{i-k-1,j-l-1}} \psi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$=\sum_{k=0}^{L-1}\sum_{l=0}^{L-1}\left(\frac{L}{2}\right)^{2\lambda}\frac{U(L-i-1-k)U(L-j-1-l)}{((k+1)^2+(l+1)^2)^\lambda}\int\int\limits_{\Delta_{k+i,l+j}} \psi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+$$

$$+\sum_{k=0}^{L-1}\sum_{l=0}^{L-1}\left(\frac{L}{2}\right)^{2\lambda}\frac{U(L-i-1-k)U(j-1-l)}{((k+1)^2+(l+1)^2)^\lambda}\int\int\limits_{\Delta_{k+i,j-l-1}} \psi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+$$

$$+\sum_{k=0}^{L-1}\sum_{l=0}^{L-1}\left(\frac{L}{2}\right)^{2\lambda}\frac{U(i-1-k)U(L-j-1-l)}{((k+1)^2+(l+1)^2)^\lambda}\int\int\limits_{\Delta_{i-k-1,j+l}} \psi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+$$

$$+\sum_{k=0}^{L-1}\sum_{l=0}^{L-1}\left(\frac{L}{2}\right)^{2\lambda}\frac{U(i-1-k)U(j-1-l)}{((k+1)^2+(l+1)^2)^\lambda}\int\int\limits_{\Delta_{i-k-1,j-l-1}} \psi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2.$$

Здесь $U(k)=1$ при $k\geq 0$, $U(k)=0$ при $k<0$.

Осредним предыдущее неравенство по всем i и j $(i,j=0,1,\ldots,L-$ $-1)$. В результате имеем

$$R_{nn}(p_{kl};x_k,y_l,\psi)\geq \frac{1}{L^2}\sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{L-1}T(\psi)(\xi_i,\eta_j)\geq$$

$$\geq \frac{1}{L^{2-2\lambda}2^{2\lambda}}\sum_{k=0}^{L-1}\sum_{l=0}^{L-1}\frac{1}{((k+1)^2+(l+1)^2)^{\lambda}}\left[\sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{L-1}U(L-i-1-k)\times\right.$$

$$\times U(L-j-1-l)Int(\Delta_{k+i,l+j})+$$

$$+\sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{L-1}U(L-i-1-k)U(j-1-l)Int(\Delta_{k+i,j-l-1})+$$

$$+\sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{L-1}U(i-1-k)U(L-j-1-l)Int(\Delta_{i-k-1,j+l})+$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{L-1}U(i-1-k)U(j-1-l)Int(\Delta_{i-k-1,j-l-1})\right]\geq$$

$$\geq \frac{1}{L^{2-2\lambda}2^{2\lambda}}\sum_{k=0}^{L-1}\sum_{l=0}^{L-1}\frac{1}{((k+1)^2+(l+1)^2)^{\lambda}}\left[\int\limits_{v_k}^{1}\int\limits_{v_l}^{1}\psi(\tau)d\tau+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{v_k}^{1}\int\limits_{-1}^{v_{L-l-2}}\psi(\tau)d\tau+\int\limits_{-1}^{v_{L-k-2}}\int\limits_{v_l}^{1}\psi(\tau)d\tau+\int\limits_{-1}^{v_{L-k-2}}\int\limits_{-1}^{v_{L-l-2}}\psi(\tau)d\tau\right]\geq$$

$$\geq \frac{1}{L^{2-2\lambda}2^{2\lambda}}\sum_{k=0}^{L-1}\sum_{l=0}^{L-1}\frac{1}{((k+1)^2+(l+1)^2)^{\lambda}}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\psi(\tau)d\tau. \qquad (1.17)$$

Из неравенства (1.17) следует, что

$$\zeta_{nn}[H_{\alpha\alpha}(D)]\geq \frac{1+o(1)}{L^{2-2\lambda}2^{2\lambda}}\sum_{k=1}^{L-1}\sum_{l=1}^{L-1}\frac{1}{(k^2+l^2)^{\lambda}}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\psi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2=$$

$$=\frac{1+o(1)}{42^{2\lambda}}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dt_1dt_2}{(t_1^2+t_2^2)^{\lambda}}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\psi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2. \qquad (1.18)$$

Из теории оптимальных квадратурных формул (см. разд. 3 главы 1 и лемму Смоляка) следует, что при любом векторе весов и узлов (X,Y,P) на классе $H_{\alpha\alpha}(D)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\psi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2\geq\frac{4}{1+\alpha}\frac{1}{n^{\alpha}}. \qquad (1.19)$$

Из неравенств (1.18) и (1.19) вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.13 [165]. Пусть $\Psi = H_{\alpha\alpha}(D)$ и интеграл Tf вычисляется по кубатурным формулам вида (1.15) при $n_1 = n_2 = n$ и $\rho_1 = \rho_2 = 0$. Тогда справедлива оценка

$$\zeta_{nn}[\Psi] \geq \frac{(1+o(1))}{2^{2\lambda}(1+\alpha)n^{\alpha}} \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{dt_1 dt_2}{(\tau_1^2+t_1^2)^{\lambda}}.$$

Построим кубатурную формулу для вычисления интеграла Tf на классе функций Гельдера $H_{\alpha\alpha}(D)$. Введем обозначение $x_k = -1 + 2k/n$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $x'_k = (x_{k+1} + x_k)/2$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $\Delta_{kl} = [x_k, x_{k+1}; x_l, x_{l+1}]$, $k, l = 0, 1, \ldots, n-1$.

Интеграл Tf будем вычислять по формуле

$$Tf = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} f(x'_k, x'_l) \int\int\limits_{\Delta_{kl}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{\lambda}} + R_{nn}(f). \quad (1.20)$$

Рассмотрим еще одну кубатурную формулу вычисления интеграла Tf.

Пусть точка $(t_1, t_2) \in \Delta_{ij}$. Обозначим через Δ_* объединение квадрата Δ_{ij} и тех квадратов из Δ_{kl}, которые имеют общие точки с Δ_{ij}. Введем кубатурную формулу

$$Lf = f(x'_i, x'_j) \int\int\limits_{\Delta_*} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{\lambda}} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}{}' f(x'_k, x'_l) \int\int\limits_{\Delta_{kl}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{\lambda}} + R_{nn}(f), \quad (1.21)$$

где $\sum\sum'$ означает суммирование по квадратам, не входящим в Δ_*.

Оценим погрешность кубатурных формул (1.20) и (1.21).

Погрешность кубатурной формулы (1.20) можно представить неравенством

$$|R_{nn}(f)| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}{}' \int\int\limits_{\Delta_{kl}} \frac{|f(\tau_1,\tau_2) - f(x'_i, x'_j)|}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{\lambda}} d\tau_1 d\tau_2 +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}{}'' \int\int\limits_{\Delta_{kl}} \frac{|f(\tau_1,\tau_2)-f(x'_k,x'_l)|}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{\lambda}} d\tau_1 d\tau_2 = r_1 + r_2. \qquad (1.22)$$

Здесь $\sum\sum'$ означает суммирование по таким k и l, что квадраты Δ_{kl} входят в Δ_*, $\sum\sum''$ означает суммирование по остальным квадратам.

Оценим выражения r_1 и r_2:

$$r_1 \le \frac{8}{n^{\alpha}} \int\int\limits_{\Delta_*} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{\lambda}} \le \frac{A}{n^{2-2\lambda+\alpha}} = o(n^{-\alpha}); \qquad (1.23)$$

$$r_2 \le \frac{4}{1+\alpha}\frac{1}{n^{2+\alpha}} \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}{}'' h(\Delta_{kl}). \qquad (1.24)$$

Здесь через $h(\Delta_{kl})$ обозначено наибольшее значение, принимаемое функцией $((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{-\lambda}$ в квадрате Δ_{kl}. Пусть это значение достигается при $\tau_1 = x_k$ и $\tau_2 = x_l$. Оценим модуль разности

$$\left| \int\int\limits_{\Delta_{kl}} \left[\frac{1}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{\lambda}} - h(\Delta_{kl}) \right] d\tau_1 d\tau_2 \right| =$$

$$= \left| \int\int\limits_{\Delta_{kl}} \left[\frac{1}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{\lambda}} - \frac{1}{((x_k-t_1)^2+(x_l-t_2)^2)^{\lambda}} \right] d\tau_1 d\tau_2 \right| \le$$

$$\le \int\int\limits_{\Delta_{kl}} \left| \frac{2\lambda(x_k-t_1+q_1(\tau_1-x_k))(\tau_1-x_k))}{((x_k-t_1+q_1(\tau_1-x_k))^2+(\tau_2-t_2)^2)^{\lambda+1}} d\tau_1 d\tau_2 \right| +$$

$$+ \int\int\limits_{\Delta_{kl}} \left| \frac{2\lambda(x_l-t_2+q_2(\tau_2-x_l))(\tau_2-x_l))}{((x_k-t_1)+(x_l-t_2+q_2(\tau_2-x_l))^2)^{\lambda+1}} d\tau_1 d\tau_2 \right| \le$$

$$\le \int\int\limits_{\Delta_{kl}} \frac{2\lambda(\tau_1-x_k)}{((x_k-t_1+q_1(\tau_1-x_k))^2+(\tau_2-t_2)^2)^{\lambda+1/2}} d\tau_1 d\tau_2 \Bigg| +$$

$$+ \int\int\limits_{\Delta_{kl}} \frac{2\lambda(\tau_2-x_l))}{((\tau_1-t_1)^2+(x_l-t_2+q_2(\tau_2-x_l))^2)^{\lambda+1/2}} d\tau_1 d\tau_2 \Bigg| \le$$

$$\leq \frac{2^4\lambda}{n^3}\frac{n^{2\lambda+1}}{(k^2+l^2)^{\lambda+1/2}} = \frac{2^4\lambda}{n^{2-2\lambda}}\frac{1}{(k^2+l^2)^{\lambda+1/2}}.$$

Здесь предполагалось, что $k \geq i+1$, $l \geq j+1$. При остальных сочетаниях k и l оценки проводятся аналогично и на этом не останавливаемся.

Следовательно,

$$r_2 \leq \frac{1}{(1+\alpha)}\frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}{}'' \int\int\limits_{\Delta_{kl}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^\lambda} +$$

$$+\frac{1}{(1+\alpha)}\frac{2^3\lambda}{n^{2-2\lambda+\alpha}}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}{}''\frac{1}{(k^2+l^2)^{\lambda+1/2}}. \tag{1.25}$$

Оценим последнее слагаемое в предыдущем неравенстве.

Очевидно,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}{}''\frac{1}{(k^2+l^2)^{\lambda+1/2}} \leq \sum_{k=-[n/2]}^{n/2}\sum_{l=-[n/2]}^{n/2}{}^*\frac{1}{(k^2+l^2)^{\lambda+1/2}} \leq$$

$$\leq \mathbf{A}\begin{cases} 1, & \lambda > 1/2; \\ \ln n, & \lambda = 1/2; \\ n^{1-2\lambda}, & \lambda < 1/2. \end{cases} \tag{1.26}$$

Здесь $\sum\sum^*$ означает суммирование по k и l таким, что $(k,l) \neq$ $\neq (0,0)$.

При получении этого неравенства использовано утверждение ([53], теорема 56) о том, что число точек с целочисленными коэффициентами, расположенными в круге $x^2+y^2=r^2$, равно $r^2+O(r)$.

Из неравенств (1.25), (1.26) следует, что

$$r_2 \leq \frac{(1+o(1))}{(1+\alpha)}\frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}{}'' \int\int\limits_{\Delta_{kl}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^\lambda}$$

и вместе с неравенством (1.23) это дает оценку

$$R_{nn}[H_{\alpha\alpha}(D)] \leq \frac{1+o(1)}{(1+\alpha)n^\alpha}\sup_{(t_1,t_2)\in D}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^\lambda} \leq$$

$$\leq \frac{1+o(1)}{(1+\alpha)n^{\alpha}} \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1)^2+(\tau_2)^2)^{\lambda}}. \tag{1.27}$$

Из сопоставления оценок $\zeta[H_{\alpha,\alpha}(D)]$ и $R_{nn}[H_{\alpha,\alpha}(D)]$ вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.14 [165]. Среди всевозможных кубатурных формул вида (1.15) при $\rho_1 = \rho_2 = 0$ и $n_1 = n_2 = n$ оптимальной по порядку является формула (1.20), имеющая погрешность (1.27).

Замечание. Аналогичное утверждение справедливо и для кубатурной формулы (1.21).

Построим асимптотически оптимальную кубатурную формулу вычисления интегралов вида Tf на классах функций W^{rr}. При построении кубатурной формулы (1.14) был построен локальный сплайн $\varphi_{mn}(t_1,t_2)$, аппроксимирующий функцию $\varphi(t_1,t_2)$ в области $[0,2\pi;0,2\pi]$. Аналогичным образом можно построить сплайн $f_{nn}(t_1,t_2)$, аппроксимирующий функцию $f(t_1,t_2)$ в области $[-1,1;-1,1]$. Интеграл Tf будем вычислять по кубатурной формуле

$$Tf = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{f_{nn}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2)^{\lambda}} + R_{nn}(f). \tag{1.28}$$

Теорема 1.15 [165]. Пусть $\Psi = W_p^{r,r}(1), 1 \leq p \leq \infty$ и интеграл Tf вычисляется по кубатурным формулам вида (1.15), где $\rho_1 = r-1,\ \rho_2 = r-1, n_1 = n_2 = n$. Тогда оптимальной по порядку является кубатурная формула (1.28), имеющая погрешность

$$R_{nn}(\Psi) = (1+o(1))\frac{4R_{rq}(1)}{2^r r!(rq+1)^{1/q}(n-1+[R_{rq}(1)]^{1/r})^r} \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1^2+\tau_2^2)^{\lambda}},$$

где $R_{rq}(t)-$ полином степени r, наименнее уклоняющийся от нуля в метрике пространства $L_q([-1,1])$.

2. Интегралы с переменной сингулярностью

2.1. Асимптотически оптимальные пассивные алгоритмы на классах Гельдера и Зигмунда

2.1.1. Прямоугольные сетки

2.1.1.1. Формулировки теорем

Рассмотрим бисингулярный интеграл

$$F\varphi = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\sigma_1,\sigma_2)\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2-s_2}{2}d\sigma_1 d\sigma_2, \tag{2.1}$$

для вычисления которого применим к.ф.

$$F\varphi = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}p_{ki}(s_1,s_2)\varphi(x_k,y_i) + R_{mn}(s_1,s_2,x_k,y_i,p_{ki},\varphi), \tag{2.2}$$

определяемую вектором (X,Y,P) узлов $0\le x_1<\dots<x_m\le 2\pi, 0\le$ $\le y_1<y_2<\dots<y_n\le 2\pi$ и коэффициентов p_{ki}. Ниже используется обозначение $D=[0,2\pi]^2$.

Теорема 2.1 [29], [36]. Пусть $\Psi = H_{\alpha,\alpha}(D)$ или $\Psi = H_3^{\alpha}(D)$ и интеграл $F\varphi$ вычисляется по к.ф. вида (2.2) при $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$ и $n=m$. Положим $N=n^2$. Тогда

$$\zeta_N\left[H_{\alpha,\alpha}(D)\right] \ge \frac{(1+o(1))8\pi^{\alpha-2}}{(1+\alpha)n^{\alpha}}\ln^2 n$$

и

$$\zeta_N\left[H_3^{\alpha}(D)\right] \ge \frac{(4+o(1))}{\pi^4}n^2\ln^2 n\int\limits_0^{\pi/n}\int\limits_0^{\pi/n}(t^2+\tau^2)^{\alpha/2}dtd\tau.$$

Квадратурная формула

$$F\varphi = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1}\varphi(t_k',\tau_l')\int\limits_{d_{kl}}\int\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2-s_2}{2}d\sigma_1 d\sigma_2+$$
$$+R_{nm}(\varphi), \tag{2.3}$$

где $d_{kl}=\Delta_{kl}\cap C_{\Delta_0}$, $\Delta_{kl}=[t_k,t_{k+1};\tau_l,\tau_{l+1}]$, $t_k=2k\pi/n$, $t_k'=(2k+$ $+1)\pi/n$, $\tau_l=2l\pi/m$, $\tau_l'=(2l+1)\pi/m$, $k=0,1,\dots,n$, $l=0,1,\dots,m$; $\Delta_0=[s_1-4\pi/n,s_1+4\pi/n;0,2\pi]\cup[0,2\pi;s_2-4\pi/m,s_2+4\pi/m]$; $C_{\Delta_0}-$ дополнение Δ_0 до квадрата $D=[0,2\pi;0,2\pi]$, имеет погрешность

$$R_{nm}(\varphi)\le\frac{4\left(\ln n+o(\ln n)\right)\left(\ln m+o(\ln m)\right)}{\pi^2}\left(\frac{\pi^{\alpha_1}}{(1+\alpha_1)n^{\alpha_1}}+\frac{\pi^{\alpha_2}}{(1+\alpha_2)m^{\alpha_2}}\right)$$

при $\varphi \in H_{\alpha_1\alpha_2}(D)$ и

$$|R_{nm}(\varphi)| \le \frac{4\left(\ln n + o(\ln n)\right)\left(\ln m + o(\ln m)\right)}{\pi^2} \int\limits_0^{\pi/n} \int\limits_0^{\pi/m} (t^2+\tau^2)^{\alpha/2} dt d\tau +$$

$$+ \frac{8\pi^{\alpha-2}}{\alpha^2 n^{\alpha_1/2} m^{\alpha_2/2}}$$

при $\varphi \in H_3^{\alpha}(D)$.

В случае $\alpha_1 = \alpha_2$ к.ф. (2.3) при $n = m$ является асимптотически оптимальной на классах $H_{\alpha\alpha}(D)$ и $H_3^{\alpha}(D)$ и ее погрешность равна

$$R_{nn}[H_{\alpha\alpha}(D)] = \frac{8(1+o(1))\ln^2 n}{(1+\alpha)\pi^{2-\alpha} n^{\alpha}}$$

и

$$R_{nn}[H_3^{\alpha}(D)] = \frac{4(1+o(1))n^2 \ln^2 n}{\pi^4} \int\limits_0^{\pi/n} \int\limits_0^{\pi/m} (t^2+\tau^2)^{\alpha/2} dt d\tau.$$

Теорема 2.2 [29], [36]. Пусть $\int\limits_0^{\pi} t^{-1}[\omega(t)]^{1/2} dt < \infty$. Среди к.ф. вида (2.2) асимптотически оптимальной на классах $H_{\omega\omega}(D)$ и $H_3^{\omega}(D)$ является формула (2.3) при $n = m$. Погрешность этой формулы равна

$$R_{nn}[H_{\omega\omega}(D)] = (1+o(1)) \frac{8n \ln^2 n}{\pi^3} \int\limits_0^{\pi/n} \omega(t) dt,$$

$$R_{nn}[H_3^{\omega}(D)] = (1+o(1)) \frac{4n \ln^2 n}{\pi^4} \int\limits_0^{\pi/n} \int\limits_0^{\pi/n} \omega\left(\sqrt{t^2+\tau^2}\right) dt d\tau.$$

Замечание. Теоремы 2.1 и 2.2 справедливы для любого конечного числа переменных. Изложение ведется только для двух переменных из-за простоты обозначений.

2.1.1.2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 2.1. Ограничимся рассмотрением класса функций $H_{\alpha_1\alpha_2}(D)$. Для простоты выкладок будем полагать $m =$

$= n, \alpha_1 = \alpha_2$. При нахождении оценки снизу погрешности к.ф. (2.2) остановимся на двух случаях:
1) существует квадрат размером $h \times h, h = 2\pi\alpha\frac{1}{n}\ln^{2/\alpha} n\left(2\pi^2\alpha\frac{1}{1+\alpha}\right)^{1/\alpha}$, в котором нет узлов к.ф. (2.2);
2) в любом квадрате со стороной, имеющей длину h, есть хотя бы один узел к.ф. (2.2).

Рассмотрим первую возможность. Если есть квадрат Δ (без ограничения общности, можно положить $\Delta = [0, h; 0, h]$), в котором нет узлов к.ф. (2.2), то их нет и в прямоугольнике $[0, h; 0, 2\pi]$. Построим в этом прямоугольнике функцию $\varphi^*(\sigma_1, \sigma_2) = (2/\pi)^\alpha \varphi_1^*(\sigma_1)\varphi_2^*(\sigma_2)$, где

$$\varphi_1^*(\sigma_1) = \begin{cases} \sigma_1^\alpha & 0 \le \sigma_1 \le h/2, \\ (h-\sigma_1)^\alpha & h/2 \le \sigma_1 \le h, \\ 0 & \sigma_1, \end{cases}$$

$$\varphi_2^*(\sigma_2) = \begin{cases} \sigma_2^\alpha & 0 \le \sigma_2 \le \pi/2, \\ (\pi-\sigma_2)^\alpha & \pi/2 \le \sigma_2 \le \pi, \\ 0 & \pi \le \sigma_2 \le 2\pi. \end{cases}$$

Подставив функцию $\varphi^*(\sigma_1, \sigma_2)$ в интеграл (2.1) и произведя несложные подсчеты, имеем

$$\sup_{\varphi \in H_{\alpha,\alpha}(D)} \max_{s_1, s_2}(F\psi)(s_1, s_2) \ge (F\psi^*)(0, 0) \ge$$

$$\ge 2\alpha^{-1}\pi^{-2}(2\alpha^{-1}h^\alpha + \pi^{-1}2^{-\alpha}h^\alpha \ln 2) \ge 8\pi^\alpha(1+\alpha)^{-1}n^{-\alpha}\ln^2 n.$$

Перейдем ко второму случаю. Разобьем квадрат $[0, 2\pi; 0, 2\pi]$ на M^2 равных квадратов: $\Delta_{ks} = [x_k, x_{k+1}; y_s, y_{s+1}], \quad k, s = 0, 1, \ldots, M-1$, где $x_k = y_k = 2\pi k/M, M = [2\pi/h] + 1$. По предположению, в каждом квадрате Δ_{ks} найдется, по крайней мере, по одному узлу к.ф. (2.2). Выберем в каждом квадрате точно по одному узлу (x_k^*, y_s^*). Каждому узлу (x_i^*, y_j^*) поставим в соответствие функцию $\psi_{ij}^*(\sigma_1, \sigma_2)$, определенную формулой

$$\psi_{ij}^*(\sigma_1, \sigma_2) = \begin{cases} \varphi(\sigma_1, \sigma_2), \ (\sigma_1, \sigma_2) \in \cup_{k=0}^1 [x_{i-a} + k\pi, x_{i+a} + k\pi; 0, 2\pi] \times \\ \times \cup_{l=0}^1 [0, 2\pi; y_{j-a} + l\pi, y_{j+a} + l\pi]; \\ \psi(\sigma_1, \sigma_2)\mathrm{sgn}\left(\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma_1 - x_i^*}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma_2 - y_j^*}{2}\right) \\ \quad \mathrm{D}, \end{cases}$$

где $a = [2^{1/\alpha}] + 1, \psi(\sigma_1, \sigma_2) = (\min_i |\sigma_1 - x_i|^\alpha) + (\min_j |\sigma_2 - y_j|^\alpha)-$ функция, введенная Н.П.Корнейчуком [89], а $\varphi(\sigma_1, \sigma_2)-$ функция, обращающаяся

в нуль на прямых $\sigma_1 = x_i^* \pm k\pi, \sigma_2 = y_j^* \pm k\pi$, удовлетворяющая неравенству

$$\varphi(\sigma_1, \sigma_2) \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - x_i^*}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - y_j^*}{2} \geq 0$$

всюду в области D и такая, что $\psi_{ij}^*(\sigma_1, \sigma_2) \in H_{\alpha\alpha}(D)$. Покажем, что такая функция всегда существует. Для этого достаточно доопределить функцию $\psi(\sigma_1, \sigma_2)$ в области $\cup_{k=0}^1 [x_{i-a} + k\pi, x_{i+a} + k\pi; 0, 2\pi] \cup_{l=0}^1$ $\cup_{l=0}^1 [0, 2\pi; y_{j-a} + l\pi, y_{j+a} + l\pi]$ следующим образом. Положим $\varphi(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ на прямых $\sigma_1 = x_i \pm k\pi$ и $\sigma_2 = y_j \pm l\pi$, $k, l = 0, 1$. Соединим отрезками прямых каждую точку, лежащую на прямой $x_i \pm k\pi$ или на прямой $y_j \pm l\pi$, с ближайшими точками границы области $\cup_{k=0}^1 [x_{i-a} + k\pi,$ $x_{i+a} + k\pi; 0, 2\pi] \cup_{l=0}^1 [0, 2\pi; y_{j-a} + l\pi, y_{j+a} + l\pi]$.

Для определенности рассмотрим область $G_a = [x_{-a}, x_a; 0, 2\pi] \bigcup$ $\bigcup [0, 2\pi; y_{-a}, y_a]$. Возьмем точку $(0, 0)$, принадлежащую этой области. Ближайшими к ней точками границы области G_a будут точки с координатами (x_a, y_a), (x_a, y_{-a}), (x_{-a}, y_{-a}), (x_{-a}, y_a). Проведем отрезки прямых, соединяющих точку $(0, 0, 0)$ с точками $(x_a, y_a, \psi(x_a, y_a)), (x_a, y_{-a},$ $\psi(x_a, y_{-a})), (x_{-a}, y_{-a}, \psi(x_{-a}, y_{-a})), (x_{-a}, y_a, \psi(x_{-a}, y_a))$. Аналогичные построения проделаем с каждой точкой, лежащей на прямых $\sigma_1 = 0$ и $\sigma_2 = 0$. Поверхность, составленная из таких отрезков прямых, определяет функцию $\varphi(\sigma_1, \sigma_2)$ в области G_α. Поверхность, построенная таким образом во всей области $\cup_{k=0}^1 [x_{i-a} + k\pi, x_{i+a} + k\pi; 0, 2\pi] \cup_{l=0}^1$ $\cup_{l=0}^1 [0, 2\pi; y_{j-a} + l\pi, y_{j+a} + l\pi]$, определяет функцию $\varphi(\sigma_1, \sigma_2)$.

Зафиксируем произвольный узел (x_i^*, y_j^*) и рассмотрим интеграл

$$(F\psi_{ij}^*)(x_i^*, y_j^*) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \psi_{ij}^*(\sigma_1, \sigma_2) \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - x_i^*}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - y_j^*}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 \geq$$

$$\geq \sum_{k=a}^{[M/2]-1} \sum_{l=a}^{[M/2]-1} \frac{1}{4\pi^2} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(k+1)}{M} \operatorname{ctg} \frac{\pi(l+1)}{M} \int\limits_{x_{k+i}}^{x_{k+i+1}} \int\limits_{y_{l+j}}^{y_{l+j+1}} \psi(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 + \right.$$

$$+ \operatorname{ctg} \frac{\pi(k+1)}{M} \operatorname{ctg} \frac{\pi(l+2)}{M} \int\limits_{x_{k+i}}^{x_{k+i+1}} \int\limits_{y_{j-l-1}}^{y_{j-l}} \psi(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 +$$

$$+\operatorname{ctg}\frac{\pi(k+2)}{M}\operatorname{ctg}\frac{\pi(l+1)}{M}\int\limits_{x_{i-k-1}}^{x_{i-k}}\int\limits_{y_{j+l}}^{y_{j+l+1}}\psi(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2+$$

$$\left.+\operatorname{ctg}\frac{\pi(k+2)}{M}\operatorname{ctg}\frac{\pi(l+2)}{M}\int\limits_{x_{i-k-1}}^{x_{i-k}}\int\limits_{y_{j-l-1}}^{y_{j-l}}\psi(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2\right].$$

Усредняя полученную оценку по i и j, имеем

$$\sup_{\varphi\in H_{\alpha\alpha}(D)}\max_{s_1 s_2}(F\varphi)(s_1,s_2)\geq\frac{1}{M^2}\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1}(F\psi_{ij}^*)(x_i^*,y_j^*)\geq$$

$$\geq\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\psi(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2\frac{1}{M^2}\sum_{k=a}^{[M/2]-1}\sum_{j=a}^{[M/2]-1}\operatorname{ctg}\frac{\pi(k+2)}{M}\operatorname{ctg}\frac{\pi(j+2)}{M}=$$

$$=\frac{1+o(1)}{\pi^4}\ln^2 n\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\psi(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2.$$

Поэтому окончательно

$$\sup_{\varphi\in H_{\alpha\alpha}(D)}\max_{s_1 s_2}(F\varphi)(s_1,s_2)\geq\frac{8\pi^{\alpha-2}}{(1+\alpha)n^\alpha}\ln^2 n.$$

Оценка снизу получена.

Перейдем к исследованию погрешности к.ф. (2.3) на классе $H_{\alpha\alpha}(D)$. Предположим, что$(s_1,s_2)\in\Delta_{ij}$. Нетрудно видеть, что

$$|R_{nm}(\varphi)|\leq$$

$$\leq\left|\frac{1}{4\pi^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1}\int\limits_{d_{kl}}\int(\varphi(\sigma_1,\sigma_2)-\varphi(t_k',\tau_l'))\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2-s_2}{2}d\sigma_1 d\sigma_2\right|+$$

$$+\left|\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Delta_0}\int(\varphi(\sigma_1,\sigma_2)-\varphi(s_1,\sigma_2)-\varphi(\sigma_1,s_2)+\varphi(s_1,s_2))\times\right.$$

$$\left.\times\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2-s_2}{2}d\sigma_1 d\sigma_2\right|=I_1+I_2. \qquad (2.4)$$

Оценим сумму I_1

$$I_1 \le \frac{4}{\pi^2} \int\limits_0^{\pi/n} \int\limits_0^{\pi/m} (\sigma_1^{\alpha_1} + \sigma_2^{\alpha_2})\, d\sigma_1 d\sigma_2 \sum_{k=0}^{n/2} \sum_{l=1}^{m/2} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{m} =$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \left[\frac{\pi^{\alpha_1}}{(1+\alpha_1)n^{\alpha_1}} + \frac{\pi^{\alpha_2}}{(1+\alpha_2)m^{\alpha_2}} \right] (\ln n + o(\ln n))(\ln m + o(\ln m)). \quad (2.5)$$

В области Δ_0 используем неравенство

$$|\varphi(\sigma_1, \sigma_2) - \varphi(s_1, \sigma_2) - \varphi(\sigma_1, s_2) + \varphi(s_1, s_2)| \le 2|\sigma_1 - s_1|^{\alpha/2} |\sigma_2 - s_2|^{\alpha/2}.$$

В результате имеем

$$I_2 \le 8\pi^{(\alpha_1+\alpha_2)/2-2} \frac{1}{\alpha_1} \frac{1}{\alpha_2} \frac{1}{n^{\alpha_1/2}} \frac{1}{m^{\alpha_2/2}}. \quad (2.6)$$

Из неравенств (2.4) – (2.6) следует справедливость приведенной в теореме оценки R_{nm} на классе $H_{\alpha_1\alpha_2}(D)$. Очевидно, при $\alpha_1 = \alpha_2$ и $n = m$

$$R_{nn}[H_{\alpha_1\alpha_2}(D)] = (8 + o(1))\pi^{\alpha-2}(1+\alpha)^{-1} n^{-\alpha} \ln^2 n.$$

Из сопоставления этой оценки и оценки снизу следует справедливость теоремы при $\varphi \in H_{\alpha\alpha}(D)$.

Теорема доказана для случая $\varphi \in H_{\alpha_1\alpha_2}(D)$. На классе функций $H_3^{\alpha}(D)$ она доказывается аналогично.

Доказательство теоремы 2.2 практически не отличается от доказательства предыдущей теоремы.

2.1.2. Произвольные сетки

Рассмотрим полисингулярный интеграл

$$K\varphi = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \cdots \operatorname{ctg} \frac{\sigma_m - s_m}{2} d\sigma_1 \ldots d\sigma_m,$$

$$0 \le s_1, \ldots, s_m \le 2\pi, \quad (2.7)$$

который будем вычислять по к.ф. вида

$$K\varphi = \sum_{k=1}^{N} p_k(s_1, \ldots, s_m)\varphi(M_k) + R_N(s_1, s_2, p_k, M_k, \varphi), \quad (2.8)$$

использующим N значений подынтегральной функции. Здесь $M_k = (\xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_m^{(k)})$– узлы к.ф.(2.8).

2.1.2.1. Формулировки теорем

Теорема 2.3 [29]. Пусть $\Psi = H_i^\alpha$ или $\Psi = Z_i^\alpha, i = 1, 2, 3$ (при $i = 2, 3$ предполагается, что $m = 2$) и интеграл $K\varphi$ вычисляется по к.ф. вида (2.8). Тогда

$$\zeta_N(H_i^\alpha) = 2\zeta_N(Z_i^\alpha) = \frac{(1+o(1))2^{m+\alpha}D_i\pi^{\alpha-m}}{m^m N^{\alpha/m}}\ln^m N,$$

где

$$D_1 = \frac{m}{2^\alpha(m+\alpha)}, D_2 = \frac{2^{1-\alpha/2}}{2+\alpha}, D_3 = \frac{12}{2+\alpha}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^{(\alpha+2)/2}\int\limits_0^{\pi/6}\frac{d\varphi}{\cos^{\alpha+2}\varphi}.$$

Теорема 2.4 [29]. Пусть $\Psi = H_1^\alpha (0 < \alpha \le 1)$. Кубатурная формула

$$K\varphi = \sum_{k_1=0}^{n-1}\cdots\sum_{k_m=0}^{n-1}\varphi(t'_{k_1},\ldots,t'_{k_m})\times$$

$$\times\int\limits_{d_{k_1\ldots k_m}}\ldots\int \operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\ldots\operatorname{ctg}\frac{\sigma_m-s_m}{2}d\sigma_1\ldots d\sigma_m + R_N(\varphi), \qquad (2.9)$$

где $n = [N^{1/m}]$; $t_{k_i} = 2k_i\pi/n$, $t'_{k_i} = (2k_i+1)\pi/n (i = 0, 1, \ldots, m)$; $d_{k_1\cdots k_m} = \Delta_{k_1\cdots k_m}\cap C_{\Delta_0}$; $\Delta_{k_1\cdots k_m} = [t_{k_1}, t_{k_1+1}; \ldots; t_{k_m}, t_{k_m+1}]$; $\Delta_0 = [s_1 - 6\pi/n, s_1 + 6\pi/n; 0, 2\pi; \ldots; 0, 2\pi]\cup\cdots\cup[0, 2\pi; \ldots; 0, 2\pi; s_m - 6\pi/n, s_m + 6\pi/n]$, $C_{\Delta_0}-$ дополнение Δ_0 до $D = [0, 2\pi; \ldots; 0, 2\pi]$, является асимптотически оптимальной среди всевозможных к.ф. вида (2.8). Ее погрешность равна

$$R_N[\Psi] = (1+o(1))2^m\pi^{\alpha-m}m^{1-m}(m+\alpha)^{-1}N^{-\alpha/m}\ln^m N.$$

Теорема 2.5 [29]. Пусть $N = 2n^2, m = 2$. Тогда на классах $H_2^\alpha(0 < \alpha \le 1)$ и $\tilde{D}_2^{1,c}$ асимптотически оптимальной является к.ф.

$$K\varphi = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\left[\varphi(\xi_k,\eta_l)\int\limits_{d_{kl}}\int\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2-s_2}{2}d\sigma_1\sigma_2+\right.$$

$$\left.+\varphi(\xi'_k,\eta'_l)\int\limits_{g_{kl}}\int\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2-s_2}{2}d\sigma_1\sigma_2\right] + R_{nn}(\varphi), \qquad (2.10)$$

где $(\xi_k, \eta_l) = (2k\pi/n, 2\pi l/n)$, $(\xi'_k, \eta'_l) = ((2k+1)\pi/n; (2l+1)\pi/n)$; $d_{kl} = \Delta_{kl} \cap C_{\Delta_0}$, $g_{kl} = \nabla_{kl} \cap C_{\Delta_0}$; Δ_{kl} и ∇_{kl}– области, характеризующиеся уравнениями $|\sigma_1 - \xi_k| + |\sigma_2 - \eta_l| \le \pi/n$ и $|\sigma_1 - \xi'_k| + |\sigma_2 - \eta'_l| \le \pi/n$; $\Delta_0 = [s_1 - 2\pi/n, s_1 + 2\pi/n; 0, 2\pi] \cup [0, 2\pi; s_2 - 2\pi/n, s_2 + 2\pi/n]$; C_{Δ_0}– дополнение Δ_0 до квадрата $D = [0, 2\pi; 0, 2\pi]$. Погрешность этой формулы равна $R_N = (1+o(1))2^{1+\alpha/2}\pi^{\alpha-2}(2+\alpha)^{-1}N^{-\alpha/2}\ln^2 N$ на обоих классах функций.

2.1.2.2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 2.3. Ограничимся оценкой снизу величины $\zeta_N[H_1^\alpha]$. Рассмотрим две возможности:
1) найдется параллелепипед с ребром длины $h = 2\pi N^{-1}\ln^{m/\alpha} N$, в котором нет узлов к.ф. (2.8);
2) в любом параллелепипеде с ребром длины h содержится, по крайней мере, один узел к.ф. (2.8).

Остановимся на первой возможности. Не ограничивая общности, можно считать, что в параллелепипеде $\Delta = [0, h; 0, h; \ldots; 0, h]$ нет узлов к.ф. (2.8). Введем в этом параллелепипеде функцию $\varphi^*(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) = (m^{-1})(2/h)^{(m-1)\alpha}\varphi_1^*(\sigma_1)\cdots\varphi_m^*(\sigma_m)$, где

$$\varphi_i^*(\sigma_i) = \begin{cases} \sigma_i^\alpha & 0 \le \sigma_i \le h/2, \\ (h-\sigma_i)^\alpha & h/2 \le \sigma_i = h, \\ 0 & \sigma_i. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что эта функция входит в класс H_1^α. Подставляя ее в интеграл $K\varphi$, имеем

$$\sup_{\varphi \in H_1^\alpha} \max_{s_1, s_2, \ldots, s_m} (K\varphi)(s_1, \ldots, s_m) \ge (K\varphi^*)(0, \ldots, 0) \ge$$

$$\ge 2^m m^{1-m}\pi^{\alpha-m}(m+\alpha)^{-1}N^{-\alpha/m}\ln^m N.$$

Перейдем ко второй возможности. Область $D = [0, 2\pi; \ldots; 0, 2\pi]$ разделим прямыми $x_j^{(k)} = 2\pi k/M, j = 1, 2, \ldots, m, k = 0, 1, \ldots, M, M = [2\pi/h]$ на кубы $\Delta_{i_1,\ldots,i_m}$. По предположению в каждом кубе $\Delta_{i_1,\ldots,i_m} = \left[x_1^{i_1}, x_1^{i_1+1}, \ldots, x_m^{i_m}, x_m^{i_{m+1}}\right]$ найдется, по крайней мере, по одному узлу к.ф. (2.8). Выберем в каждом кубе $\Delta_{i_1,\ldots,i_m}$ по одному узлу к.ф. (2.8) и выбранный узел обозначим через $x^*_{i_1,\ldots,i_m} = \left(x_1^{*i_1}, \ldots, x_m^{*i_m}\right)$. Каждому узлу $x^*_{i_1,\ldots,i_m}$ поставим в соответствие функцию

$$\varphi^*_{i_1,\ldots,i_m}(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) =$$

$$= \begin{cases} \varphi_{i_1,\dots,i_m}(\sigma_1,\dots,\sigma_m) \\ x_j^{i_j-a} \le \sigma_j \le x_j^{i_j+a}, x_j^{i_j+[M/2]-a} \le \sigma_j \le x_j^{i_j+[M/2]+a}, j=1,2,\dots,m; \\ \psi(\sigma_1,\dots,\sigma_m)\mathrm{sgn}\left(\prod\limits_{k=1}^{m} \mathrm{ctg}\,\frac{\sigma_k - x_k^{*i_k}}{2}\right) \\ \quad \sigma_{\mathrm{j}}(\mathrm{j}=1,2,\dots,\mathrm{m}), \end{cases}$$

где $\psi(\sigma_1,\dots,\sigma_m)-$ функция, определенная в статье В.Ф.Бабенко [5] формулой $\psi(\sigma_1,\dots,\sigma_m) = \left[\min\limits_{1\le k\le N} \rho_1(\sigma, M_k)\right]^{\alpha}$, $\sigma = (\sigma_1,\dots,\sigma_m)$, $a = [2^{1/\alpha}]+1$. Функция $\varphi_{i_1,\dots,i_m}(\sigma_1,\dots,\sigma_m)$ подбирается так, чтобы $\varphi^*_{i_1,\dots,i_m} \in H_1^{\alpha}$ и

$$\varphi_{i_1,\dots,i_m}(\sigma_1,\dots,\sigma_m)\mathrm{sgn}\left(\prod_{k=1}^{m} \mathrm{ctg}\,\frac{\sigma_k - x_k^{*j_k}}{2}\right) \ge 0.$$

Нетрудно видеть, что такой подбор можно осуществить.

Функцию $\varphi^*_{i_1,\dots,i_m}(\sigma_1,\dots,\sigma_m)$ подставим в интеграл (2.7), полагая $(s_1,\dots,s_m) = (x_1^{*i_1},\dots,x_m^{*i_m})$, и оценим снизу интеграл $(K\varphi^*_{i_1,\dots,i_m})\,(x_1^{*i_1},\dots,x_m^{*i_m})$. Имеем

$$(K\varphi^*_{i_1,\dots,i_m})(x_1^{*i_1},\dots,x_m^{*i_m}) \ge \frac{1}{\pi^m} \sum_{k_1=a}^{[M/2]-1} \cdots \sum_{k_1=a}^{[M/2]-1} \left(\frac{M}{\pi}\right)^m \left[\frac{1}{k_1+1}\cdots\frac{1}{k_m+1}\times\right.$$

$$\times \int\limits_{x_{i_1+k_1}}^{x_{i_1+k_1+1}} \cdots \int\limits_{x_{i_m+k_m}}^{x_{i_m+k_m+1}} \varphi^*_{i_1,\dots,i_m}(\sigma_1,\dots,\sigma_m)d\sigma_1\cdots d\sigma_m + \cdots +$$

$$\left. +\frac{1}{k_1+1}\cdots\frac{1}{k_m+1} \int\limits_{x_{i_1-k_1-1}}^{x_{i_1-k_1}} \cdots \int\limits_{x_{i_m-k_m-1}}^{x_{i_m-k_m}} \varphi^*_{i_1,\dots,i_m}(\sigma_1,\dots,\sigma_m)d\sigma_1\cdots d\sigma_m \right].$$

Осредняя значения $(K\varphi^*_{i_1,\dots,i_m})(x_1^{*i_1}\dots x_m^{*i_m})$ по значениям $1 \le i_1,\dots,i_m \le M$, имеем

$$\sup_{\varphi\in H_1^{\alpha}} \max_{s_1,\dots,s_m} (K\varphi)(s_1,\dots,s_m) \ge \frac{\ln^m M}{\pi^{2m}} \int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} \psi(\sigma_1,\dots,\sigma_m)d\sigma_1\cdots d\sigma_m.$$

В.Ф.Бабенко [5], [6] показано, что на классе функций H_1^α

$$\int\limits_0^{2\pi}\cdots\int\limits_0^{2\pi}\psi(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)\geq\frac{2^{m-1}m\pi^{m+\alpha}}{(m+\alpha)N^{\alpha/m}}.$$

Таким образом, верхняя грань оценки снизу имеет вид

$$\sup_{\varphi\in H_1^\alpha}\max_{s_1,\ldots,s_m}(K\varphi)(s_1,\ldots,s_m)\geq 2^{m-1}m^{1-m}\pi^{\alpha-m}(m+\alpha)^{-1}N^{-\alpha/m}\ln^m N.$$

На классе функций H_1^α теорема доказана.

Рассуждения, необходимые для получения остальных оценок, принципиально не отличаются от проведенных выше. Отличие состоит лишь в различных значениях верхних граней погрешности к.ф. для регулярного интеграла $\int\limits_0^{2\pi}\cdots\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)d\sigma_1\cdots d\sigma_m$ на различных классах функций H_i^α, Z_i^α. Эти оценки приведены в статьях В.Ф.Бабенко [5, 6]. Пользуясь ими, убеждаемся в справедливости теоремы 2.3.

Доказательство теоремы 2.4. Нетрудно видеть, что погрешность к.ф. (2.9) оценивается неравенством

$$|R_N(\varphi)|\leq\left|\sum_{k_1=0}^{n-1}\cdots\sum_{k_m=0}^{n-1}\frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_{d_{k_1\cdots k_m}}\cdots\int\left(\varphi(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)-\varphi(t'_{k_1},\ldots,t'_{k_m})\right)\times\right.$$

$$\left.\times\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\cdots\operatorname{ctg}\frac{\sigma_m-s_m}{2}d\sigma_1\cdots d\sigma_m\right|+$$

$$+\left|\frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_{\Delta_0}\cdots\int\varphi(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\ldots\operatorname{ctg}\frac{\sigma_m-s_m}{2}d\sigma_1\cdots d\sigma_m\right|=$$

$$=I_1+I_2.$$

Так как $\varphi\in H_1^\alpha$, то

$$I_1\leq$$

$$\leq\frac{n^m}{\pi^{2m}}\sum_{k_1=3}^{[n/2]-1}\cdots\sum_{k_m=3}^{[n/2]-1}\int\limits_{\Delta_{k_1\cdots k_m}}\left|\varphi(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)-\varphi(t'_{k_1},\ldots,t'_{k_m})\right|d\sigma_1\cdots d\sigma_m\leq$$

$$\leq \frac{N \ln^m N}{\pi^{2m} m^m} \int\limits_{\Delta_1} \max\left(|\sigma_1|^\alpha, \ldots, |\sigma_m|^\alpha\right) d\sigma_1 \cdots d\sigma_m,$$

где $\Delta_0 = [-\pi/n, \pi/n; \ldots; -\pi/n, \pi/n]$.

В статье В.Ф.Бабенко [6] показано, что

$$\int\limits_{\Delta_0} \max\left(|\sigma_1|^\alpha, \ldots, |\sigma_m|^\alpha\right) d\sigma_1 \cdots d\sigma_m = \frac{(1+o(1))2^m \pi^{m+\alpha} m}{(m+\alpha) N^{1+\alpha/m}}.$$

Следовательно, $I_1 \leq (1+o(1))2^m \pi^{\alpha-m} m^{1-m} (m+\alpha)^{-1} N^{-\alpha/m} \ln^m N$.

Перейдем к оценке I_2. Пусть сначала $m = 2$. Тогда

$$\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi(\sigma_1, \sigma_2) \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \psi(\sigma_1, \sigma_2) \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2,$$

где $\psi(\sigma_1, \sigma_2) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2) - \varphi(s_1, \sigma_2) - \varphi(\sigma_1, s_2) + \varphi(s_1, s_2)$.

Известно ([63, с.90]), что $|\psi(\sigma_1, \sigma_2)| \leq 2|\sigma_1 - s_1|^{\alpha/2} |\sigma_2 - s_2|^{\alpha/2}$. Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что

$$|\psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)| = |\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) - \varphi(s_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m) + \cdots + \varphi(s_1, \ldots, s_m)| \leq$$

$$\leq m(|\sigma_1 - s_1| \cdots |\sigma_m - s_m|)^{\alpha/m}.$$

Тогда

$$I_3 = \frac{1}{(2\pi)^m} \left| \int\limits_\Delta \psi(\sigma_1, \ldots \sigma_m) \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \cdots \operatorname{ctg} \frac{\sigma_m - s_m}{2} d\sigma_1 \cdots d\sigma_m \right| \leq$$

$$\leq \frac{2^m m}{(2\pi)^m} \left[\int\limits_0^{6\pi/n} \frac{2 d\sigma}{\sigma^{1-\alpha/m}} \right]^m \leq \frac{6^\alpha 2^m m^{m+1}}{\alpha^m \pi^{m-\alpha} N^{\alpha/m}}.$$

Из оценок $I_1 - I_2$ следует справедливость теоремы.

Доказательство теоремы 2.5. Погрешность к.ф. (2.10) оценивается неравенством

$$|R_N(\varphi)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\pi^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\left|\int\limits_{d_{kl}}\int(\varphi(\sigma_1,\sigma_2)-\varphi(\xi_k,\eta_l))\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2-s_2}{2}d\sigma_1 d\sigma_2\right|+$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\left|\int\limits_{g_{kl}}\int(\varphi(\sigma_1,\sigma_2)-\varphi(\xi'_k,\eta'_l))\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2-s_2}{2}d\sigma_1 d\sigma_2\right|+$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\left|\int\limits_{\Delta_0}\int\varphi(\sigma_1,\sigma_2)\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2-s_2}{2}d\sigma_1 d\sigma_2\right|=I_1+I_2+I_3.$$

Нетрудно видеть, что

$$I_1\leq\frac{n^2}{\pi^4}\sum_{k=3}^{[n/2]-1}\sum_{l=3}^{[n/2]-1}\frac{1}{kl}\left|\int\limits_{d_{0,0}}\int(\varphi(\sigma_1,\sigma_2)-\varphi(0,0))d\sigma_1 d\sigma_2\right|\leq$$

$$\leq\frac{(1+o(1))2^{\alpha/2}\ln^2 N}{\pi^{2-\alpha}(2+\alpha)N^{\alpha/2}}.$$

Сумма I_2 оценивается аналогично. Слагаемое I_3 оценивается так же, как оценивалось слагаемое I_3 при доказательстве предыдущей теоремы. Из оценок I_1, I_2, I_3 следует, что

$$R_N[H_2^\alpha(1)]=(1+o(1))2^{1+\alpha/2}\pi^{\alpha-2}N^{-\alpha/2}(2+\alpha)^{-1}.$$

Теорема доказана на классе H_2^α. На классе $\tilde{D}_2^{1,c}$ она доказывается аналогично.

2.2. Асимптотически оптимальные пассивные алгоритмы на классе $\tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{r}}$

2.2.1. Прямоугольные сетки

2.2.1.1. Формулировки теорем

Теорема 2.6 [36]. Пусть $\Psi=\tilde{W}^{r,r}(1)$. Среди к.ф. вида (2.2) при $n=m$ асимптотически оптимальной является формула

$$F\varphi=\sum_{k=0}^{M-1}{}'\sum_{l=0}^{M-1}{}'l_{L,L}\varphi(\Delta_{kl})\operatorname{ctg}\frac{t_k-s_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t_l-s_2}{2}+$$

$$+\sum_{k=0}^{M-1}{}'\sum_{l=0}^{M-1}{}'\prod_{n,n}(T_{r-1}\varphi(t_k,t_l))\psi(\Delta_{k,l})+$$

$$+\sum_{k=0}^{M-1}{}'\prod_{n,n}(T_{r-1}\varphi(t_k,t_{j-1}))\psi(\Delta_{k,j-1}\cap\dots\cap\Delta_{k,j+2})+$$

$$+\sum_{l=0}^{M-1}{}'\prod_{n,n}(T_{r-1}\varphi(t_{i-1},t_l))\psi(\Delta_{i-1,l}\cap\dots\cap\Delta_{i+2,l})+$$

$$+\prod_{n,n}(T_{r-1}\varphi(t_{i-1},t_{j-1}))\psi([t_{i-1},t_{i+2};t_{j-1},t_{j+2}])+R_{nn}(\varphi),$$

где $t_k=2k\pi/M$, $k=0,1,\dots,M$, $M=[n/L], L=[\ln^{1/r}n]$, $\Delta_{kl}=[t_k,t_{k+1};\,t_l,t_{l+1}]$, $K\psi(\Delta_{kl})=\int\limits_{\Delta_{kl}}\int K\operatorname{ctg}\dfrac{\sigma_1-s_1}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\sigma_2-s_2}{2}d\sigma_1d\sigma_2$, $(s_1,s_2)\in\Delta_{ij}, \sum\limits_k{}'(\sum\limits_l{}')$ означает суммирование по $k\neq i-1,\dots,i+2(l\neq$ $\neq j-1,\dots,j+2)$. Погрешность этой формулы равна $R_{nn}[\Psi]=(1+$ $+o(1))8K_r\ln^2n/\pi^2n^r$.

Наряду с интегралом (2.1) рассмотрим интеграл

$$F\varphi=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\varphi(\sigma_1,\sigma_2)\operatorname{ctg}\pi(\sigma_1-s_1)\operatorname{ctg}\pi(\sigma_2-s_2)d\sigma_1d\sigma_2, \tag{2.11}$$

который будем вычислять по к.ф.

$$F\varphi=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=0}^{\rho_1}\sum_{j=0}^{\rho_2}p_{kl}^{ij}(s_1,s_2)\varphi^{(i,j)}(x_k,y_l)+$$

$$+R_{nn}(s_1,s_2,x_k,y_l,p_{kl},\varphi). \tag{2.12}$$

Теорема 2.7 [29]. Пусть $\Psi=\tilde{C}_2^r(1)$ и интеграл $F\varphi$ вычисляется по к.ф. (2.12) при $\rho_1+\rho_2\le r-1,\ m=n$. Тогда

$$\zeta_N[\Psi]\ge(1+o(1))4R_{r1}(1)\ln^2n/(r+1)!(2n)^r\pi^2.$$

Теорема 2.8 [29]. Пусть $\Psi=\tilde{W}^{r,s}(1)$ и интеграл $F\varphi$ вычисляется по к.ф. (2.12), где $\rho_1=r-1,\ \rho_2=s-1$. Тогда

$$\zeta_N[\Psi]\ge(1+o(1))\frac{4}{\pi^2}\left[\frac{R_{r1}(1)((2m)^r}{(r+1)!}+\frac{R_{s1}(1)((2n)^s}{(s+1)!}\right]\ln m\ln n.$$

В качестве к.ф., реализующей оценку теоремы 2.8, возьмем

$$F\varphi = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \varphi_{mn}(\sigma_1, \sigma_2) \operatorname{ctg} \pi(\sigma_1 - s_1) \operatorname{ctg} \pi(\sigma_2 - s_2) d\sigma_1 d\sigma_2 + R_{mn}(\varphi). \quad (2.13)$$

Опишем построение сплайна φ_{mn}. Разобьем стороны квадрата $\Omega = [0,1;0,1]$ на m и n равных частей. Через Δ_{kl} обозначим прямоугольник $\Delta_{kl} = [k/m, (k+1)/m; l/n, (l+1)/n], k = 0, 1, \ldots, m-1$, $l = 0, 1, \ldots, n-1$. Пусть точка $(s_1, s_2) \in \Delta_{ij}$. Вначале аппроксимируем функцию $\varphi(\sigma_1, \sigma_2)$ по переменной σ_2 и построим сплайн $\varphi_n(\sigma_1, \sigma_2)$ по следующему правилу. Пусть σ_1- произвольное фиксированное число $(0 \le \sigma_1 \le 1)$. На сегментах $[k/n, (k+1)/n]$ при $k \ne j-2, \ldots, j+1$ положим

$$\varphi_n(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{l=0}^{s-1} \left[\frac{\varphi^{(0,l)}(\sigma_1, k/n)}{l!} (\sigma_2 - \frac{k}{n})^l + B_l \delta^{(l)}(\sigma_1, \frac{(k+1)}{n} \right],$$

где

$$\delta(\sigma_1, \sigma_2) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2) - \sum_{l=0}^{s-1} \frac{\varphi^{(0,l)}(\sigma_1, k/n)}{l!} (\sigma_2 - \frac{k}{n})^l.$$

Коэффициенты B_l определяются из равенства

$$\left(\frac{k+1}{n} - \sigma_1 \right)^s - \sum_{l=0}^{s-1} \frac{B_l s!}{(s-l-1)!} \frac{1}{n} \left(\frac{k+1}{n} - \sigma_2 \right)^{s-l-1} =$$

$$= (-1)^s R_{s1} \left(\frac{2k+1}{2n}; \frac{1}{2n}; \sigma_2 \right),$$

где $R_{s1}(a, h, x)-$ полином степени s, наименее уклоняющийся от нуля в метрике пространства L на сегменте $[a-h, a+h]$. На сегменте $[(j-2)/n, (j+2)/n]$ функция $\varphi_n(\sigma_1, \sigma_2)$ определяется отрезком ряда Тейлора

$$\varphi_n(\sigma_1, \sigma_2) = \varphi(\sigma_1, \frac{j}{n}) + \frac{\varphi^{(0,1)}(\sigma_1, j/n)}{1!} (\sigma_2 - \frac{j}{n}) + \cdots +$$

$$+ \frac{\varphi^{(0,s-1)}(\sigma_1, j/n)}{(s-1)!} (\sigma_2 - \frac{j}{n})^{s-1}.$$

Аналогично по функции $\varphi_n(\sigma_1, \sigma_2)$ построим функцию $\varphi_{mn}(\sigma_1, \sigma_2)$.

Теорема 2.9 [29]. Среди всевозможных к.ф. вида (2.12) асимптотически оптимальной на классе функций $\Psi = \tilde{W}^{r,s}(1)$ является формула (2.13). Ее погрешность при n и m, независимо стремящихся к ∞, равна

$$R_{mn}[\Psi] = (1+o(1))\,4\ln m \ln n \left(\frac{R_{r1}(1)}{\pi^2(r+1)!(2m)^r} + \frac{R_{s1}(1)}{\pi^2(s+1)!(2n)^s} \right).$$

2.2.1.2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 2.6. Нужно рассмотреть две возможности:
1) имеется квадрат с длиной стороны $h = O(n^{-1}\ln^{2/r} n)$, в котором нет узлов к.ф. (2.2);
2) в каждом квадрате с длиной стороны h имеется, по крайней мере, по одному узлу к.ф. (2.2).

Исследование первой возможности мало отличается от аналогичных исследований, неоднократно приведенных выше. Остановимся на исследовании второй возможности. Разделим квадрат $D = [0, 2\pi; 0, 2\pi]$ на более мелкие квадраты $\Delta_{ij} = [v_i, v_{i+1}; w_j, w_{j+1}](v_i = 2i\pi/B, w_j = = 2j\pi/B, i, j = 0, 1, \ldots, B, B = [2\pi/h]$ и в каждом квадрате Δ_{ij} выберем по узлу $M^*_{ij} = (x^*_i, y^*_j)$ к.ф. (2.2). Каждому узлу M^*_{ij} поставим в соответствие функцию

$$\psi_{ij}(\sigma_1, \sigma_2) = (\psi(\sigma_1) + \psi(\sigma_2) + \psi(\sigma_1)\psi(\sigma_2))\, l_{ij}(\sigma_1, \sigma_2). \tag{2.14}$$

Здесь $\psi(\sigma)-$ описанная в разд. 3 главы 1 функция, принадлежащая классу $\tilde{W}^r(1)$, обращающаяся в нуль в узлах $x_1, \ldots, x_m$ и такая, что $\int\limits_0^{2\pi} \psi(\sigma)d\sigma \geq 2\pi K_r/N^r$.
Через $l_{ij}(\sigma_1, \sigma_2)$ обозначена средняя функция с бесконечно дифференцируемым ядром усреднения и радиусом усреднения $R = h\ln n$ по переменным σ_1 и σ_2, построенная путем осреднения функции, равной

$$\operatorname{sgn}\left(\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1 - x^*_i}{2} \operatorname{ctg}\frac{\sigma_2 - y^*_j}{2} \right)$$

при

$$(\sigma_1, \sigma_2) \in D \setminus \cup_{k=0}^{1} [x^*_i - 2R + k\pi, x^*_i + 2R + k\pi; 0, 2\pi] \cup_{l=0}^{1}$$
$$\cup_{l=0}^{1} \left[0, 2\pi; y^*_j - 2R + l\pi, y^*_j + 2R + l\pi\right]$$

и равной нулю во всех остальных точках квадрата D.

Известно (см. С.Л.Соболев [136, с.697]), что $\left|l_{ij}^{(k,l)}(\sigma_1,\sigma_2)\right| \le AR^{-k}R^{-l}$, где $A-$ абсолютная константа. Можно показать, что функция ψ_{ij} принадлежит классу $W^{r,r}(1+o(1))$. Усредняя значения интегралов $(F\psi_{ij})(x_i^*,y_j^*)$ по всем значениям i,j, убеждаемся в справедливости неравенства

$$\sup_{(i,j)}\sup_{(s_1,s_2)}(F\psi_{ij})(s_1,s_2) \ge (1+o(1))8K_r\ln^2 n/\pi^2 n^r.$$

Оценка $R_N[\Psi]$ выводится из рассуждений, аналогичных проведенным при доказательстве теоремы 2.8. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.7. Как и при доказательстве теоремы 2.6, ограничимся второй возможностью. Как и в теореме 2.6, доказывается, что в каждом квадрате вида Δ_{ij} имеется, по крайней мере, по одному узлу к.ф. (2.12). Выбрав в каждом квадрате Δ_{ij} по узлу M_{ij}^*, поставим в соответствие выбранным узлам функцию $\psi_{ij}(\sigma_1,\sigma_2) =$
$= \psi_i(\sigma_1)l_j(\sigma_2)$. Здесь $\psi_i(\sigma)-$ функция, принадлежащая классу $\bar{W}^r(1)$, обращающаяся в нуль вместе со своими производными до $r-1$ порядка в узлах x_k и такая, что

$$\int_0^1 \psi_i(\sigma)\operatorname{ctg}\pi(\sigma-x_i)d\sigma \ge \frac{2^{1-r}R_{r1}(1)}{\pi(r+1)!n^r}\ln n.$$

В зазд. 2 главы 3 показано, что такие функции существуют. Через $l_j(\sigma)$ обозначена средняя функция с бесконечно дифференцируемым ядром усреднения и с радиусом усреднения $R = h\ln n$ по переменной σ, построенная путем осреднения функции, равной $\operatorname{sgn}\operatorname{ctg}\pi(\sigma-y_j^*)$ при $\sigma\in[0,1]\setminus\cup_{k=0}^1\left[y_j^*-2R+\frac{k}{2};y_j^*-2R+\frac{k}{2}\right]$ и равной нулю при
$\sigma\in\cup_{k=0}^1[y_j^*-2R+\frac{k}{2};y_j^*+2R+\frac{k}{2}]$. Очевидно, $\psi_{ij}\in C_2^r(1+o(1))$. Подставляя функцию ψ_{ij} в интеграл $(F\psi_{ij})(x_i^*,y_j^*)$ и осредняя по всем значениям i и j, имеем

$$\sup_{(i,j)}\sup_{(s_1^*,s_2^*)}(F\psi_{ij})(s_1,s_2) \ge (1+o(1))\frac{4R_{r1}(1)\ln^2 n}{(r+1)!(2n)^r}. \tag{2.15}$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.8 принципиально не отличается от доказательств предыдущих теорем.

Доказательство теоремы 2.9. Определим погрешность к.ф. (2.13), полагая $(s_1, s_2) \in \Delta_{ij}$. Очевидно,

$$|R_{mn}(\varphi)| \le I_1 + I_2 =$$

$$= \left| \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 [\psi_n(\sigma_1, \sigma_2)] \operatorname{ctg} \pi(\sigma_1 - s_1) \operatorname{ctg} \pi(\sigma_2 - s_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 [\psi_{mn}(\sigma_1, \sigma_2)] \operatorname{ctg} \pi(\sigma_1 - s_1) \operatorname{ctg} \pi(\sigma_2 - s_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \right|, \qquad (2.16)$$

где $\psi_n(\sigma_1, \sigma_2) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2) - \varphi_n(\sigma_1, \sigma_2), \psi_{mn}(\sigma_1, \sigma_2) = \varphi_n(\sigma_1, \sigma_2) - -\varphi_{mn}(\sigma_1, \sigma_2)$.

Оценка

$$\max_{\sigma_1, s_2} |\psi(\sigma_1, s_2)| = \max_{\sigma_1, s_2} \left| \int\limits_0^1 (\varphi(\sigma_1, \sigma_2) - \varphi_n(\sigma_1, \sigma_2)) \operatorname{ctg} \pi(\sigma_2 - s_2) d\sigma_2 \right| \le$$

$$\le (1 + o(1))\, 2R_{s1}(1) \ln n / \pi(s+1)!(2n)^s \qquad (2.17)$$

была получена в разд. 2 главы 3.

Оценим теперь

$$I_1 = \left| \int\limits_0^1 \psi(\sigma_1, s_2) \operatorname{ctg} \pi(\sigma_1 - s_1) d\sigma_1 \right| = \left| \int\limits_{s_1 - 1/2}^{s_1 + 1/2} \psi(\sigma_1, \sigma_2) \operatorname{ctg} \pi(\sigma_1 - s_1) d\sigma_1 \right| \le$$

$$\le \left| \int\limits_{\Delta} \psi(\sigma_1, s_2) \operatorname{ctg} \pi(\sigma_1 - s_1) d\sigma_1 \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{[s_1 - 1/2, s_1 + 1/2] \setminus \Delta} \psi(\sigma_1, s_2) \operatorname{ctg} \pi(\sigma_1 - s_1) d\sigma_1 \right| = I_{11} + I_{12}, \qquad (2.18)$$

где $\Delta = [s_1 - 1/2m, s_1 + 1/2m]$.

Нетрудно видеть, что

$$I_{11} = \left| \int\limits_{\Delta} (\psi_n(\sigma_1, s_2) - \psi_n(s_1, s_2)) \operatorname{ctg} \pi(\sigma_1 - s_1) d\sigma_1 \right| = O\left(\frac{\ln n}{mn}\right); \quad (2.19)$$

$$I_{12} \leq \max_{\sigma_1, s_2} |\psi_n(\sigma_1, s_2)| \frac{2}{\pi} \ln m \tag{2.20}$$

и, окончательно, из неравенств (2.18) – (2.20) имеем

$$I_1 \leq (1 + o(1)) 4 R_{s1}(1) \ln n \ln m / \pi^2 (s+1)! (2n)^s + O(m^{-1} n^{-s} \ln n). \tag{2.21}$$

Переходя к оценке I_2, заметим, что функция $\varphi_{mn}(\sigma_1, \sigma_2)$ имеет производную $\varphi_{mn}^{(r,0)}(\sigma_1, \sigma_2)$ по модулю, равную $1 + o(1)$. Поэтому, повторяя предыдущие выкладки, имеем

$$I_2 = (1 + o(1)) 4 R_{r1}(1) \ln n \ln m / \pi^2 (r+1)! (2m)^r + O(n^{-1} m^{-r} \ln m). \tag{2.22}$$

Из оценок I_1 и I_2 следует справедливость теоремы.

2.3. Оптимальные алгоритмы на классах $\mathbf{H}_{\alpha,\alpha}, \mathbf{W}^{\mathbf{r,s}}$

2.3.1. Классы $\mathbf{H}_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{D}), \mathbf{H}_{\mathbf{i}}^{\alpha}(\mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2})$

Недостатком к.ф. (2.3), (2.9) является необходимость вычислять интегралы вида $\int\int\limits_{\Delta_{kl}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2$ при различных значениях (s_1, s_2). Представляет интерес построение алгоритмов, лишенных этого недостатка.

2.3.1.1. Формулировки теорем

Теорема 2.10 [29]. Пусть $\Psi = H_{\alpha,\alpha}(D)$ или $\Psi = H_3^{\alpha}(D)$ $(0 < \alpha \leq$ $\leq 1)$. Среди всевозможных к.ф. вида (2.2) формула

$$(F\varphi)(s_1, s_2) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \varphi(t'_k, t'_l) \int\limits_{\Delta_{kl}} \int \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - t'_i}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - t'_j}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 + R_{nn}(\varphi), \quad (2.23)$$

где $\Delta_{kl} = [t_k, t_{k+1}; t_l, t_{l+1}]$, $t_k = 2k\pi/n$, $k, l = 0, 1, \ldots, n$, $(s_1, s_2) \in \Delta_{ij}$; $t'_k = (t_k + t_{k+1})/2$, является асимптотически оптимальной при $0 < \alpha <$ < 1 и оптимальной по порядку при $\alpha = 1$. Ее погрешность равна

$$R_{nn}[\Psi] = \frac{8(1 + o(1)) \ln^2 n}{(1 + \alpha)\pi^{2-\alpha} n^{\alpha}}$$

$$\Psi =\in H_{\alpha\alpha}(D), 0 < \alpha < 1;$$

$$R_{nn}[\Psi] = \frac{4(1 + o(1)) n^2 \ln^2 n}{\pi^4} \int\limits_0^{\pi/n} \int\limits_0^{\pi/n} (t^2 + \tau^2)^{\alpha/2} dt d\tau$$

$$\Psi \in H_3^{\alpha}(D), 0 < \alpha < 1;$$

$$R_{nn}[\Psi] = 12(1 + o(1)) \frac{\ln^2 n}{\pi n} \quad \varphi \in H_{11}(D);$$

$$R_{nn}[\Psi] = \frac{4(1 + o(1)) n^2 \ln^2 n}{\pi^4} \int\limits_0^{2\pi/n} \int\limits_0^{2\pi/n} (t^2 + \tau^2)^{1/2} dt d\tau \quad \Psi \in H_3^1(D).$$

Теорема 2.11 [29]. Пусть $\Psi = H_1^{\alpha}(0 < \alpha \leq 1)$. Среди всевозможных к.ф. вида (2.2) формула (2.23), в которой $n = [\sqrt{N}]$, является асимптотически оптимальной при $0 < \alpha < 1$ и оптимальной по порядку при $\alpha = 1$. Ее погрешность равна

$$R_N[\Psi] = (1 + o(1)) 2\pi^{\alpha-2} (2 + \alpha)^{-1} N^{-\alpha/2} \ln^2 N \quad \alpha < 1$$

и

$$R_N[\Psi] \leq (1 + o(1)) 8\pi^{-1} N^{-1/2} \ln^2 N \quad \alpha = 1.$$

Пусть $N = 2n^2$. Введем обозначения $(\xi_k, \eta_l) = \left(\dfrac{2\pi k}{n}, \dfrac{2\pi l}{n}\right)$, $(\xi'_k, \eta'_l) = \left(\dfrac{2\pi k}{n} + \dfrac{\pi}{n}, \dfrac{2\pi l}{n} + \dfrac{\pi}{n}\right)$. Через g_{kl} и g'_{kl} обозначим области $(|\sigma_1 - \xi_k| + |\sigma_2 - \eta_l|) \le \frac{\pi}{n}$ и $(|\sigma_1 - \xi'_k| + |\sigma_2 - \eta'_l|) \le \frac{\pi}{n}$.

Пусть $(s_1, s_2) \in g_{ij}$. Будем вычислять интеграл $F\varphi$ по к.ф.

$$F\varphi = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n}{}' \varphi(\xi_k, \eta_l) \int\limits_{g_{kl} \cap D} \int \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - \xi_i}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - \eta_j}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n}{}'' \varphi(\xi'_k, \eta'_l) \int\limits_{g'_{kl} \cap D} \int \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - \xi_i}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - \eta_j}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 +$$

$$+ R_N(\varphi). \tag{2.24}$$

Здесь предполагается, что область D закольцована по обеим переменным, т.е. является тором.

Теорема 2.12 [29]. Пусть $N = 2n^2$, $\Psi = H_2^\alpha$. Среди всевозможных к.ф. вида (2.8) формула (2.24) является асимптотически оптимальной при $0 < \alpha < 1$ и оптимальной по порядку при $\alpha = 1$. Ее погрешность равна

$$R_N[\Psi] = (1 + o(1)) \begin{cases} 2^{1+\alpha/2} \pi^{\alpha-2} (2+\alpha)^{-1} N^{-\alpha/2} \ln^2 N & \alpha < 1 \\ 9\sqrt{2} \ln^2 N / \pi N^{1/2} & \alpha = 1. \end{cases}$$

2.3.1.2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 2.10. Рассмотрим случай, когда $\alpha < 1$. Пусть $(s_1, s_2) \in \Delta_{ij}$. Погрешность к.ф. (2.23) можно представить в виде

$$|R_{nn}(\varphi)| \le \left|(S\varphi)(s_1, s_2) - (S\varphi)(t'_i, t'_j)\right| +$$

$$+ \left| (S\varphi)(t'_i, t'_j) - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \varphi(t'_k, t'_l) \int\limits_{\Delta_{kl}} \int \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - t'_i}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - t'_j}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 \right| =$$

$$= I_1 + I_2. \tag{2.25}$$

Выражение I_2 было оценено при доказательстве теоремы 2.1. Для оценки I_1 воспользуемся следующим утверждением, принадлежащим Л.Чезари.

Лемма 2.1. Если $\varphi(t_1, t_2) \in H_{\alpha\alpha}(0 < \alpha < 1)$, то

$$|(S\varphi)(t_1, t_2) - (S\varphi)(t_1', t_2')| =$$

$$= O\left(|t_1 - t_1'| \ln\left(\pi/|t_1 - t_1'|\right) + |t_2 - t_2'|^{\alpha} \ln\left(\pi/|t_2 - t_2'|\right)\right). \qquad (2.26)$$

Следовательно, если $\varphi \in H_{\alpha\alpha}$, то $I_1 = O(n^{-\alpha} \ln n)$.

Если $\varphi \in H_3^{\alpha}$, то $H_3^{\alpha} \subset H_{\alpha\alpha}(2^{\alpha/2})$ и $I_1 = O(n^{-\alpha} \ln n)$. При $\alpha < 1$ теорема доказана. При $\alpha = 1$ проводятся выкладки, подобные приведенным при доказательстве теоремы 2.1.

Доказательство теоремы 2.12 подобно доказательству предыдущей теоремы. Нетрудно видеть, что $H_1^{\alpha} \subset H_{\alpha\alpha}(1)$. Используя выкладки, проведенные при доказательстве теоремы 2.3, и неравенство (2.26), убеждаемся в справедливости теоремы при $\alpha < 1$. При $\alpha = 1$ следует повторить выкладки, проведенные при доказательстве теоремы 2.3.

Доказательство теоремы 2.13 подобно доказательству предыдущей теоремы. Нетрудно видеть, что $H_2^{\alpha} \subset H_{\alpha\alpha}(2^{\alpha})$. Используя выкладки, приведенные при доказательстве теоремы 2.5, и неравенство (2.26), убеждаемся в справедливости теоремы при $\alpha < 1$. При $\alpha = 1$ следует повторить выкладки, приведенные при доказательстве теоремы 2.5.

2.3.2. Классы $\mathbf{W_p^{r,s}}$ и $\mathbf{W_p^{r+\alpha,s+\beta}}$

Рассмотрим интеграл (2.1), которому поставим в соответствие к.ф.

$$F\varphi = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \sum_{i=0}^{\rho_1} \sum_{j=0}^{\rho_2} p_{klij}(s_1, s_2) \varphi^{(i,j)}(x_k, y_l) + R_{nm}(\varphi); \qquad (2.27)$$

$$F\varphi = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=0}^{\rho_1} \sum_{j=0}^{\rho_2} p_{kij}(s_1, s_2) \varphi^{(i,j)}(M_k) + R_N(\varphi), \qquad (2.28)$$

где $M_k = (\xi_k, \eta_k)$. Отметим, что все полученные ниже результаты справедливы для любого конечного числа переменных.

2.3.2.1. Формулировки теорем

Теорема 2.14 [29]. Каков бы ни был вектор (X, Y, P) узлов и весов, при любых $0 \le \rho_1 \le r-1,\ 0 \le \rho_2 \le s-1$ найдется такая функция $\varphi^* \in \tilde{W}_p^{r,s}(1)$, на которой погрешность к.ф. (2.27)

$$|R_{nm}(\varphi^*)| = O\left((mn)^{1/p}(n^{-r} + m^{-s})\right).$$

Теорема 2.15 [29]. Каков бы ни был вектор (X, Y, P) узлов и весов к.ф. (2.27), при любых $0 \le \rho_1 \le r-1,\ 0 \le \rho_2 \le s-1$ найдется такая функция $\varphi^* \in \tilde{W}_p^{r+\alpha,s+\beta}(1)$, что погрешность этой формулы

$$|R_{nm}(\varphi^*)| = O(n^{-r-\alpha+1/p}m^{1/p} + m^{-s-\beta+1/p}n^{1/p}).$$

Теорема 2.16 [29]. При любом наборе (p_k, M_k) весов и узлов к.ф. (2.28) ее погрешность на классе функций $\tilde{W}_p^r(1)$ не меньше величины $O(N^{-r/2+1/p})$.

Теорема 2.17 [29]. При любом наборе (p_k, M_k) весов и узлов к.ф. (2.28) ее погрешность на классе функций $\tilde{W}_p^{r,r}(1)$ не меньше величины $O(N^{-r+1/p})$.

Теорема 2.18 [29]. При любом наборе (p_k, M_k) весов и узлов к.ф. (2.28) ее погрешность на классе функций $\tilde{W}_{L_p[0,2\pi;0,2\pi]}^{r+\alpha}(1)$ не меньше величины $O(N^{-(r+\alpha)/2+1/p})$.

Теорема 2.19 [29]. При любом наборе (p_k, M_k) весов и узлов к.ф. (2.28) ее погрешность на классе функций $\tilde{W}_p^{r+\alpha,r+\alpha}(1)$ не меньше величины $O(N^{-r-\alpha+1/p})$.

Теорема 2.20 [29]. Погрешность к.ф.

$$F\varphi = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_{nm}\left[\varphi(\sigma_1,\sigma_2)\right]\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1 - s_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2 - s_2}{2}d\sigma_1 d\sigma_2 +$$

$$+R_{nm}(\varphi), \tag{2.29}$$

где $P_{nm}\left[\varphi(x,y)\right] = P_n^x\left[P_m^y[\varphi(x,y)]\right], P_n^x-$ оператор проектирования по переменной x на множество интерполяционных тригонометрических полиномов степени n по узлам $s_k = 2k\pi/(2n+1), k = 0, 1, \ldots, 2n$, на классе $\tilde{W}_p^{r,s}(1)$ равна $|R_{nm}| = O\left((nm)^{1/p}(n^{-r} + m^{-s})\right)$.

2.3.2.2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 2.14. Разделим квадрат $[0,2\pi]^2$ по оси абсцисс на $2n$, а ось ординат на $2m$ равных частей точками $s_k^{(1)} = k\pi/n, k = 0,1,\ldots,2n$ и $s_k^{(2)} = k\pi/m, k = 0,1,\ldots,2m$. Тогда найдется, по крайней мере, n столбцов и m строк, в которых нет узлов к.ф. (2.27). Назовем эти строки и столбцы отмеченными. Таким образом, имеется по крайней мере n отмеченных столбцов и m отмеченных строк. Обозначим через $\theta_1(k,l)(\theta_2(k,l))$ отношение числа отмеченных столбцов (строк) среди столбцов (строк) с номерами $k, k+1, \ldots, l$ к общему числу $(l-k)$ столбцов (строк). Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 2.7 главы 3, можно показать, что существует такой номер $\bar{k}_i(\bar{k}_1 \le 3n/4, \bar{k}_2 \le\le 3m/4)$, что
$\theta_i(\bar{k}_i, l) > 1/3, i = 1,2$. Положим $s_1 = \pi\bar{k}_1/n, s_2 = \pi\bar{k}_2/m$ и определим функцию $\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)$ следующим образом. На всех квадратах $\Delta_{kj} = \left[s_k^{(1)}, s_{k+1}^{(1)}; s_j^{(2)}, s_{j+1}^{(2)}\right]$, у которых или индекс $k \le \bar{k}_1 - 1$ или индекс $j \le \bar{k}_2 - 1$, функция $\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2) = 0$. Она также равна нулю на квадратах, не являющихся пересечениями отмеченных строк и столбцов. На квадратах Δ_{kj}, у которых $k \ge \bar{k}_1$ и $j \ge \bar{k}_2$ и которые являются пересечениями отмеченных строк и столбцов, функция $\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)$ определяется по формуле

$$\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2) = \varphi_1(\sigma_1)\varphi_2(\sigma_2) + \varphi_3(\sigma_1)\varphi_4(\sigma_2),$$

где

$$\varphi_1(\sigma_1) = A_1 n^{r-1/q}\left((\sigma_1 - s_k^{(1)})(s_{k+1}^{(1)} - \sigma_1)\right)^r (\sigma_1 - s_1)^{-1}\sin^2 n(\sigma_1 - s_1);$$

$$\varphi_2(\sigma_2) = \begin{cases} 0,\ 0 \le \sigma_2 \le s_2 + 2\pi/m; \\ ((\sigma_2 - s_2 - 2\pi/m)(2\pi - \sigma_2))^s (\sigma_2 - s_2)^{-1} m^{-1/q}, \\ s_2 + 2\pi/m \le \sigma_2 \le 2\pi; \end{cases}$$

$$\varphi_3(\sigma_1) = \begin{cases} 0,\ 0 \le \sigma_1 \le s_1 + 2\pi/n; \\ ((\sigma_1 - s_1 - 2\pi/n)(2\pi - \sigma_1))^r (\sigma_1 - s_1)^{-1} n^{-1/q}, \\ s_1 + 2\pi/n \le \sigma_1 \le 2\pi; \end{cases}$$

$$\varphi_4(\sigma_2) = A_2 m^{s-1/q}\left((\sigma_2 - s_j^{(2)})(s_{j+1}^{(2)} - \sigma_2)\right)^r (\sigma_2 - s_2)^{-1}\sin^2 m(\sigma_2 - s_2).$$

Константы A_1 и A_2 подбираются из условия, чтобы $||\varphi^{*(r,s)}||_{L_p} \le$ ≤ 1. Нетрудно видеть, что такие константы существуют. Подставляя

функцию $\varphi^*(\sigma_1, \sigma_2)$ в формулу (2.27) и проводя соответствующие выкладки, получаем оценку $|R_{nm}(\varphi^*)| = O\left((nm)^{1/p}(n^{-r} + m^{-s})\right)$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.15 проводится аналогично.

Доказательство теоремы 2.16. Пусть $n = \left[\sqrt{2N}\right] + 1$. Разделим каждую из сторон квадрата $D = [0, 2\pi; 0, 2\pi]$ на n равных частей точками $s_k^{(1)} = 2k\pi/n, s_k^{(2)} = 2k\pi/n, k = 0, 1, \ldots, n$. Проведем через эти точки прямые, параллельные координатным осям. В результате получаем n^2 квадратов. Так как $n^2 > 2N$, то найдется, по крайней мере, N квадратов, в которых нет узлов к.ф. (2.28). Будем называть квадраты, в которых отсутствуют узлы M_k, отмеченными, и строку отмеченной, если среди всех квадратов, входящих в строку,
$n/4+1$ квадрат является отмеченным. Нетрудно видеть, что существуют отмеченные строки. В самом деле, если бы они не существовали, то общее число отмеченных квадратов было бы меньше, нежели $n^2/4 = 2N/4 = N/2$, в то время как их число равно N.

Перейдем теперь к отмеченным строкам. Как было определено выше, в отмеченной строке имеется не менее $n/4 + 1$ отмеченных квадратов. Обозначим через $\Theta_1(k, l)$ отношение числа отмеченных квадратов $K_{k+1}, \ldots, K_l$ к общему числу $(l - k)$ квадратов. Как и при доказательстве теоремы 2.7 главы 3, можно показать, что существует $\bar{k}_1 = 5n/6$, для которого $\min_{l>k}\Theta_1(k, l) \geq 1/10$.

Определим минимальное число отмеченных строк. Для этого предположим, что в отмеченных строках содержится максимальное число отмеченных квадратов $-n$. Обозначим число таких строк через x и предположим также, что в остальных строках содержится $n/4$ отмеченных квадратов. Тогда $nx + (n - x)n/4 = N$. Отсюда следует, что $x = n/3$. Таким образом, число отмеченных строк не менее $n/3$. Обозначим через $\Theta(k, l)$ отношение числа отмеченных строк среди $s_{k+1}, \ldots, s_l$ к общему числу строк $(l-k)$. Здесь $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $l = k+1, \ldots, n-1$. Докажем, что существует $\bar{k} < 4n/5$, для которого $min_{l>\bar{k}}\Theta(\bar{k}, l) \geq 1/8$.

Предположим противное. Тогда для некоторого l_1 будет $\Theta(l_1, l_2) <$ $< 1/8$. Этот процесс можно продолжить до тех пор, пока не найдется такое число μ, что $\Theta(l_{\mu-1}, l_\mu) < 1/8$, а $l_\mu > 4n/5$. Тогда число отмеченных строк не может превысить $l_\mu 8^{-1} + (n - l_\mu) < 10^{-1}n + n - 8 \times 10^{-1}n =$ $= 3 \times 10^{-1}n$, что противоречит доказанному выше утверждению о том,

что количество отмеченных строк не менее $n/3$. Таким образом, доказано, что существует число $\bar{k}, \bar{k} = 4n/5$, такое, что
$\min_{l>\bar{k}}\Theta(\bar{k}, l) \geq 1/8$.

Очевидно, приведенные рассуждения распространяются на случай любого конечного m.

Положим в интеграле (2.1) значения s_1 и s_2 равными $s_1 = (\bar{k}_1 - 1)2\pi/n, s_2 = (\bar{k}_2 - 1)2\pi/n$. Определим функцию $\varphi^*(\sigma_1, \sigma_2)$ следующим образом. На всех неотмеченных квадратах, на всех строках с номерами меньше $\bar{k}_1$ и на всех столбцах с номерами меньше $\bar{k}_2$ положим $\varphi^*(\sigma_1, \sigma_2) = 0$. В оставшихся отмеченных квадратах функцию $\varphi^*(\sigma_1, \sigma_2)$ определяем по формуле

$$\varphi^*(\sigma_1, \sigma_2) = An^{3r-2+2/p}\left((\sigma_1 - s_k^{(1)})(s_{k+1}^{(1)} - \sigma_1)\right)^r (\sigma_1 - s_1)^{-1}\sin^2 n(\sigma_1 - s_1)\times$$

$$\times\left((\sigma_2 - s_j^{(2)})(s_{j+1}^{(2)} - \sigma_2)\right)^r (\sigma_2 - s_2)^{-1}\sin^2 n(\sigma_2 - s_2)$$

при $s_k^{(1)} \leq \sigma_1 \leq s_{k+1}^{(1)}, s_j^{(2)} \leq \sigma_2 \leq s_{j+1}^{(2)}$, если $k \geq \bar{k}_1 + 1, j \geq \bar{k}_2 + 1$.

Константа A подбирается из условия, чтобы $||\varphi^{*(r)}(\sigma_1, \sigma_2)||_{L_p} \leq 1$. Подставив функцию $\varphi^*(\sigma_1, \sigma_2)$ в к.ф. (2.28), после несложных вычислений получаем оценку погрешности:$|R_N(\varphi^*)| \geq A_1 n^{-r+2/p} = A_2 N^{-r/2+1/p}$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.17 проводится по аналогии с доказательством предыдущей теоремы с той лишь разницей, что в качестве функции $\varphi^*(\sigma_1, \sigma_2)$ берется

$$\varphi^*(\sigma_1, \sigma_2) = An^{2r-2+2/p}\left((\sigma_1 - s_k^{(1)})(s_{k+1}^{(1)} - \sigma_1)\right)^r (\sigma_1 - s_1)^{-1}\sin^2 n(\sigma_1 - s_1)\times$$

$$\times\left((\sigma_2 - s_j^{(2)})(s_{j+1}^{(2)} - \sigma_2)\right)^r (\sigma_2 - s_2)^{-1}\sin^2 n(\sigma_2 - s_2).$$

Доказательства теорем 2.18 и 2.19 проводятся по аналогии с доказательством теоремы 2.16.

Доказательство теоремы 2.20. Из неравенства С.М.Никольского, приведенного в разд. 3 главы 1, следует, что

$$|R_{nm}(\varphi)| = \left|\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} D_{nm}[\varphi(\sigma_1, \sigma_2)]\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1 - s_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2 - s_2}{2}d\sigma_1 d\sigma_2\right| \leq$$

$$\leq A(nm)^{1/p}\left\|\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} D_{nm}[\varphi(\sigma_1,\sigma_2)]\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2-s_2}{2}d\sigma_1 d\sigma_2\right\|\leq$$

$$\leq A(nm)^{1/p}\left\|D_{nm}[\varphi(\sigma_1,\sigma_2)]\right\|_{L_p},$$

где $D_{nm}=E-P_{nm}, E-$ тождественный оператор. Теорема доказана.

2.4. Устойчивость пассивных алгоритмов

При вычислении сингулярных интегралов $F\varphi$ и $K\varphi$ по к.ф. вида (2.2) и (2.8), как правило, оказывается, что значения подынтегральной функции в узлах к. ф. заданы с точностью ε. Это значит, что при использовании к.ф. (2.2) вместо матрицы $I_{nm}=\{\varphi_{ij}\}_{i=\overline{1,n},j=\overline{1,m}}$ значений $\varphi_{ij}=\varphi(t_i,\tau_j)$ задана матрица $\tilde{I}_{nm}=\{\tilde{\varphi}_{ij}\}_{i=\overline{1,n},j=\overline{1,m}}$, где $\tilde{\varphi}_{ij}=\tilde{\varphi}(t_j,\tau_j)$ и $|\varphi_{ij}-\tilde{\varphi}_{ij}|\leq\varepsilon$ для $\forall i,j$. В случае к.ф. (2.8) это означает, что вместо вектора $I_N=(\varphi_1,\ldots,\varphi_N)$ значений $\varphi_i=\varphi(M_i)$ задан вектор $\tilde{I}_N=(\tilde{\varphi}_1,\ldots,\tilde{\varphi}_N)$, где $\tilde{\varphi}_i=\tilde{\varphi}(M_i)$ и $|\varphi_i-\tilde{\varphi}_i|\leq\varepsilon$ для $\forall i$.

Представляет значительный интерес построение при этих предположениях оптимальных к.ф.

2.4.1. Формулировки теорем

Теорема 2.21 [29]. Верхняя грань оценки снизу погрешности к.ф. вида (2.2) при $n=m$ на классе $H_{\alpha\alpha}(D)$ при задании матрицы I_{nn} с погрешностью ε не меньше величины, равной

$$\gamma(\varepsilon,n)=\frac{4\ln^2 n}{(1+\alpha)\pi^{2-\alpha}n^{\alpha}}(1+o(1))+\frac{2(2+\alpha)\varepsilon\ln^2\varepsilon}{\pi^{2+\alpha}\alpha^3}+\frac{4(1+2\alpha)\varepsilon|\ln\varepsilon|}{\pi^{2+\alpha}\alpha^3}.$$

Теорема 2.22 [29]. При задании матрицы I_{nm} с точностью ε к.ф. (2.3) на классе $\Psi=H_{\alpha\alpha}(D)$ имеет погрешность

$$R_{nm}[\Psi]\leq r_1+r_2=\left\{\frac{4}{\pi^2}\left[\frac{\pi^{\alpha_1}}{(1+\alpha_1)n^{\alpha_1}}+\frac{\pi^{\alpha_2}}{(1+\alpha_2)m^{\alpha_2}}\right]\times\right.$$

$$\left.\times(4+(\ln n+o(\ln n))(\ln m+o(\ln m)))+\frac{8}{n^{\alpha_1/2}m^{\alpha_2/2}\alpha_1\alpha_2\pi^{2-(\alpha_1+\alpha_2)/2}}\right\}+$$

$$+\left\{\frac{4\varepsilon}{\pi^2}\left(1+o(1)+\left|\ln\sin\frac{\pi}{n}\right|\right)\left(1+o(1)+\left|\ln\sin\frac{\pi}{m}\right|\right)+\right.$$

$$+\frac{\varepsilon}{mn}\left[n\left(1+o(1)+\left|\ln\sin\frac{\pi}{n}\right|\right)+m\left(1+o(1)+\left|\ln\sin\frac{\pi}{m}\right|\right)\right]\Bigg\}.$$

Замечание 1. Теорема остается справедливой, если $\Psi = H_{\omega,\omega}(D)$. В этом случае погрешность к.ф. (2.3) оценивается неравенством

$$R_N[\Psi] \le (1+o(1))\frac{8n}{\pi^3}\ln^2 n\int\limits_0^{\pi/n}\omega(t)dt + r_2.$$

Замечание 2. Теорема справедлива при любом конечном числе переменных.

Теорема 2.23 [29]. Верхняя грань оценки снизу погрешности к.ф. вида (2.8) на классе $H_i^\alpha, i=1,2$ (при $i=2$ предполагается, что $m = 2$) при задании вектора I_N с погрешностью ε не меньше величины, равной

$$\zeta_N[H_i^\alpha] \ge D_i(1+o(1))2^{m+\alpha}m^{-m}\pi^{\alpha-m}N^{-\alpha/m}\ln^m N + o(\varepsilon|\ln^m\varepsilon|),$$

где $D_1 = 2^{-\alpha}m/(m+\alpha), D_2 = 2^{-\alpha/2}2/(2+\alpha)$.

Теорема 2.24 [29]. При задании вектора I с точностью ε к.ф. (2.9) на классе $\Psi = H_1^\alpha$ имеет место погрешность

$$R_N[\Psi] \le$$

$$\le (1+o(1))\left(\frac{2^m\ln^m N}{\pi^{m-\alpha}m^{m-1}(m+\alpha)N^{\alpha/m}} + \left(\frac{2}{\pi m}\right)^m\varepsilon\ln^m N + \frac{2^{m+1}}{\pi^m}\varepsilon\ln N\right).$$

Теорема 2.25 [29]. При задании вектора I_N с точностью ε к.ф. (2.9) на классе $\Psi = H_2^\alpha$ имеет место погрешность

$$R_N[\Psi] \le (1+o(1))\left(\frac{2^{1+\alpha/2}\ln^2 N}{\pi^{2-\alpha}(2+\alpha)N^{\alpha/2}} + \frac{\varepsilon}{\pi^2}(\ln^2 N + 4\ln N)\right).$$

Исследуем устойчивость к.ф. вида (2.2) и (2.8) в предположении, что веса $\rho_{kl}(s_1,s_2)$ и $\rho_i(s_1,s_2)$ заданы с точностью ε.

Теорема 2.26 [29]. Верхняя грань оценки снизу погрешности к.ф. вида (2.2) на классе $H_{\alpha_1\alpha_2}(D)$ и вида (2.8) на классах $H_i^\alpha, Z_i^\alpha (i=1,2,3)$ равна бесконечности.

Теорема 2.27 [29]. Пусть $\Psi = H_{\alpha_1\alpha_2}(D)$. Если веса

$$p_{kl} = \int\limits_{d_{kl}}\int \operatorname{ctg}\frac{\sigma_1 - s_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2 - s_2}{2}d\sigma_1 d\sigma_2$$

вычисляются с точностью $\varepsilon, (s_1, s_2) \in \Delta_{ij}$, то к.ф.

$$F\varphi = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{m-1} \left(\varphi(t'_k, \tau'_l) - \varphi(t'_i, \tau'_l) - \varphi(t'_k, \tau'_j) + \varphi(t'_i, \tau'_j)\right) p_{kl} +$$

$$+ R_{nm}(\varphi), \tag{2.30}$$

в которой использованы обозначения теоремы 2.1, имеет погрешность

$$R_N[\Psi] \le \frac{8\pi^2 nm}{(2+\alpha)^2}\varepsilon + \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\pi^{\alpha_1}}{(1+\alpha_1)n^{\alpha_1}} + \frac{\pi^{\alpha_2}}{(1+\alpha_2)m^{\alpha_2}}\right) \times$$

$$\times (\ln n + o(\ln n))(\ln m + o(\ln m)) +$$

$$+ \left(\frac{4 \cdot 6^{\alpha_1}}{\pi^{2-\alpha_1} n^{\alpha_1}} + \frac{4 \cdot 6^{\alpha_2}}{\pi^{2-\alpha_2} n^{\alpha_2}} + \frac{4}{\pi^{2-\alpha_2}(1+\alpha_2)m^{\alpha_2}} + \frac{4}{\pi^{2-\alpha_1}(1+\alpha_1)m^{\alpha_1}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2}\left(\left(\frac{6\pi}{n}\right)^{\alpha_1} + \left(\frac{6\pi}{m}\right)^{\alpha_2}\right)(\ln n + o(1))(\ln m + o(1)).$$

Замечание. Аналогичная теорема справедлива и на классе H_1^α.

Теорема 2.28 [29]. Пусть $\Psi = H_2^\alpha(D)$. Если веса

$$p_{kl} = \int\limits_{d_{kl}} \int \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2,$$

$$p^*_{kl} = \int\limits_{g_{kl}} \int \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2$$

вычисляются с точностью $\varepsilon, (s_1, s_2) \in \Delta_{ij}$, то к.ф.

$$F\varphi = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} \left[\left(\varphi(\zeta_k, \eta_l) - \varphi(\zeta_i, \eta_l) - \varphi(\zeta_k, \eta_j) + \varphi(\zeta_i, \eta_j)\right) p_{kl} +\right.$$

$$\left. + (\varphi(\zeta'_k, \eta'_l) - \varphi(\zeta'_i, \eta'_l) - \varphi(\zeta'_k, \eta'_j) + \varphi(\zeta'_i, \eta'_j) p^*_{kl}\right] + R_N(\varphi), \tag{2.31}$$

в которой использованы обозначения теоремы 2.5, имеет место погрешность

$$R_N[\Psi] \le (1 + o(1)) \frac{2\ln^2 N}{\pi^{2-\alpha} N^{\alpha/2}} \left(\frac{2^{\alpha/2}}{2+\alpha} + 2^{1+2\alpha+\alpha/2} + 3^\alpha 2^{\alpha/2-1}\right) + \frac{2^{2+\alpha} n^2 \varepsilon}{(1+\alpha)}.$$

2.4.2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 2.21. Для вычисления погрешности к.ф. поступим следующим образом. Предположим, что матрица $\tilde{I}_{nm}$ нулевая, и построим по этой матрице функцию $\varphi^*(t,\tau) \in H_{\alpha_1\alpha_2}(D)$ и такую, что $|\varphi^*(x_k, y_l)| \le \varepsilon$. Тогда

$$R_N[\Psi] = \sup_{\varphi^* \in H^{\alpha_1\alpha_2}, \tilde{I}_{nm}=0} \max_s F\varphi^*.$$

Нужно рассмотреть две возможности:
1) существует квадрат с длиной стороны $h, h = O\left((n^{-\alpha}\ln^2 n + \varepsilon)^{1/\alpha}\right)$, в котором нет узлов к.ф. (2.2);
2) в каждом квадрате с длиной стороны h имеется, по крайней мере, один узел к.ф. (2.2).

Остановимся на первой возможности. Не ограничивая общности, можно считать, что в прямоугольнике $[0,h;0,h]$ нет узлов к.ф. (2.2). При доказательстве теоремы 2.1 была построена функция $\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)$ и было показано, что $\max(F\varphi^*)(s_1,s_2) \ge A2^{3-2\alpha}\pi^\alpha h^\alpha$. Следовательно, $\max\limits_{s_1,s_2}(F\varphi^*)(s_1,s_2) \ge \gamma(\varepsilon,n)$.

Перейдем ко второй возможности. Разделим сторону квадрата $D = [0,2\pi;0,2\pi]$, параллельную оси абсцисс, на $N = [2\pi/h]$ равных частей точками $v_k = 2k\pi/N,\ k = 0,1,\ldots,N$, а сторону, параллельную оси ординат, на $N = [2\pi/h]$ равных частей точками $w_k = 2k\pi/N,\ k = 0,1,\ldots,N$. Через Δ_{kj} обозначим прямоугольник $[v_k, v_{k+1}; w_j, w_{j+1}]$. По предположению, в каждом прямоугольнике Δ_{kj} найдется, по крайней мере, по одному узлу к.ф. (2.2). Выберем в каждом квадрате по одному узлу и выбранный узел обозначим через $M^*_{kj} = (x^*_k, y^*_j)$. Каждому узлу M^*_{kj} поставим в соответствие функцию

$$\tilde{\psi}^*_{kj}(\sigma_1,\sigma_2) = A\left[\psi^*_{kj}(\sigma_1,\sigma_2) + \frac{1}{\pi^\alpha}\mathrm{sgn}\left(\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma_1 - x^*_k}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma_2 - y^*_j}{2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\min\left(\varepsilon, |\sigma_1 - x^*_k - v_1\pi|^{\alpha_1}|\sigma_2 - y^*_j - v_2\pi|^{\alpha_2}\right)\right], v_1, v_2 = 0, \pm 1,$$

где $\psi^*_{kj}(\sigma_1,\sigma_2)$– функция, введенная в п.2.1.2. Константа A подбирается из требования, чтобы $\tilde{\psi}^*_{kj} \in H_{\alpha_1\alpha_2}$. Нетрудно видеть, что эта константа может быть взята равной $1/2$.

Оценим снизу интеграл

$$(F\tilde{\psi}^*_{kj})(x^*_k, y^*_j) \geq A(F\psi^*_{kj})(x^*_k, y^*_j) + \frac{2(2+\alpha)\varepsilon \ln^2 \varepsilon}{\pi^{2+\alpha}\alpha^3} +$$

$$+ \frac{4(1+2\alpha)\varepsilon |\ln \varepsilon|}{\pi^{2+\alpha}\alpha^3}.$$

Усредняя эту оценку по всем значениям k и j, имеем

$$\sup_{k,j} \sup_{s_1,s_2} (F\tilde{\psi}^*_{kj})(x^*_k, y^*_j) \geq \gamma(\varepsilon, n).$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.22. Погрешность к.ф. (2.3) при неточно заданной матрице I_{nm} значений подынтегральной функции можно оценить, повторяя доказательство теоремы 2.1. При этом

$$I_1 \leq \frac{4\varepsilon}{\pi^2}\left(1 + o(1) + \left|\ln \sin \frac{\pi}{n}\right|\right)\left(1 + o(1) + \left|\ln \sin \frac{\pi}{m}\right|\right) +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{\pi^{\alpha_1}}{(1+\alpha_1)n^{\alpha_1}} + \frac{\pi^{\alpha_2}}{(1+\alpha_2)m^{\alpha_2}}\right](\ln n + o(\ln n))(\ln m + o(\ln m)),$$

$$I_2 \leq \frac{4\varepsilon\pi}{nm}((1+o(1))(n+m) + |\ln \sin \frac{\pi}{n}| + |\ln \sin \frac{\pi}{m}|) +$$

$$+ \frac{4\pi^{\alpha_1 - 2}}{(1+\alpha_1)n^{\alpha_1}} \ln n + \frac{4\pi^{\alpha_2 - 2}}{(1+\alpha_2)^1 m^{\alpha_2}} \ln m.$$

Оценка выражения I_3 остается без изменения. Из полученных неравенств следует справедливость теоремы.

Доказательство теоремы 2.23 принципиально не отличается от доказательства теоремы 2.20.

Доказательство теоремы 2.24. Для получения нужной оценки достаточно повторить выкладки, сделанные при доказательстве теоремы 2.4, учитывая неточность задания значения функции φ в узлах к.ф. Нетрудно видеть, что

$$I_1 \leq (1+o(1))2^m \pi^{\alpha - m} m^{1-m}(m+\alpha)^{-1} N^{-\alpha/m} \ln^m N + (2\pi^{-1}m^{-1})^m \varepsilon \ln^m N.$$

Величина I_2 оценивается так же, как при доказательстве теоремы 2.4. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.25. Для получения оценки погрешности к.ф. (2.10) при неточно заданных значениях $\varphi(\varepsilon_k, \eta_l)$ достаточно повторить выкладки, сделанные при доказательстве теоремы 2.5. Имеем

$$I_1 \le (1+o(1))2^{1+\alpha/2}\pi^{\alpha-2}(2+\alpha)^{-1}N^{-\alpha/2}\ln^2 N + \varepsilon\pi^{-2}\ln^2 N,$$

$$I_2 \le (1+o(1))2^{3+\alpha/2}\pi^{\alpha-2}(2+\alpha)^{-1}N^{-\alpha/2}\ln N + 4\varepsilon\pi^2\ln N.$$

Из этих неравенств следует справедливость теоремы.

Доказательство теоремы 2.26 принципиально не отличается от доказательства теоремы 1.16 из главы 3.

Доказательство теоремы 2.27. Погрешность к.ф. (2.30) состоит из погрешности этой формулы при точном вычислении значений p_{kl} и p'_{kl} на классе $H_{\alpha_1\alpha_2}(D)$ и погрешности, привносимой неточностью вычисления коэффициентов p_{kl} и p'_{kl}. Вторая составляющая оценивается неравенством $8\pi^2(2+\alpha)^{-1}nm\varepsilon$. Для оценки первой составляющей нужно повторить выкладки теоремы 2.4.

Доказательство теоремы 2.28. Погрешность к.ф. (2.31) складывается из погрешности этой формулы на классе $H_2^\alpha(D)$ при точном задании весов p_{kl} и p^*_{kl} и из погрешности, обусловленной неточностью вычисления p_{kl}, p^*_{kl}. Для оценки первой составляющей необходимо повторить доказательство теоремы 2.5, заменяя разность $\varphi(\sigma_1,\sigma_2) - \varphi(\xi_k,\eta_l)$ на

$$[\varphi(\sigma_1,\sigma_2) - \varphi(s_1,\sigma_2) - \varphi(\sigma_1,s_2) + \varphi(s_1,s_2)] -$$

$$-\left[\varphi(\xi_k,\eta_l) - \varphi(\xi_k,\eta_j) - \varphi(\xi_i,\eta_j) + \varphi(\xi_i,\eta_j)\right].$$

Вторая составляющая равна $2^{2+\alpha}n^2\varepsilon/(1+\alpha)$. Теорема доказана.

2.5. Математическое ожидание величины погрешности кубатурных формул

При вычислении бисингулярных интегралов $F\varphi$ часто используется к.ф.

$$F\varphi = \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_{nm}\left[\varphi(\sigma_1,\sigma_2)\right]\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2-s_2}{2}d\sigma_1 d\sigma_2 +$$

$$+R_{nm}(\varphi), \tag{2.32}$$

где $P_{nm}[\varphi(\sigma_1,\sigma_2)] = P_n[P_m(\sigma_1,\sigma_2)]$. Эта к.ф. использует $(2n+1)(2m+1)$ узлов. При выполнении вычислений по формуле (2.32) порядок $(n+$ $+m)$ полинома $P_{nm}[\varphi]$ и, следовательно, число узлов $(2n+1)(2m+1)$ являются случайными величинами.

Теорема 2.29 [29]. Пусть $N \le n \le 2N, M \le m \le 2M, \varphi \in$ $\in \tilde{W}^{r,s}H_{\alpha,\alpha}, \min((r+\alpha),(s+\alpha)) > 1/2$. Тогда математическое ожидание модуля ошибки к.ф. (2.32) равно

$$..|R_{nm}(\varphi)| = O\left((N^{-r-\alpha-1/2} + M^{-r-\alpha-1/2})(\ln^2 n \ln m + \ln n \ln^2 m)\right).$$

Доказательство теоремы 2.29. Представим разность $\varphi(s_1,s_2) - P_{nm}[\varphi(s_1,s_2)]$ в виде

$$\varphi(s_1,s_2) - P_{nm}[\varphi(s_1,s_2)] = \sum_{j=1}^{\infty}\left(T_{(j+1)n,(j+1)m}[\varphi] - T_{(jn)(jm)}[\varphi]\right) +$$

$$+T_{nm}[\varphi] - P_{nm}[\varphi],$$

где $T_{nm}[\varphi]-$ полином наилучшего равномерного приближения степени n и m по переменным s_1 и s_2 к функции $\varphi(s_1,s_2)$.

Используя известное неравенство (см., например, [188])

$$\|FP_{nm}[\varphi]\|_C \le 4(1+\pi^2)(1+\ln n)(1+\ln m)||\varphi||_C,$$

получаем оценку

$$|R_{nm}(\varphi)| \le A\sum_{j=1}^{\infty} E_{(jn)(jm)} \ln jn \ln jm.$$

В работе С.Н.Бернштейна [17] показано, что

$$E_{nm}[\varphi] \le A(E_{n\infty}[\varphi] + E_{\infty m}[\varphi]) \ln(n+m).$$

Поэтому

$$|R_{nm}(\varphi)| \le A\sum_{j=1}^{\infty}(E_{(jn)\infty}(\varphi) + E_{\infty(jm)}(\varphi))(\ln^3 j + (\ln n + \ln m)^2 \ln j +$$

$$+(\ln n + \ln m)\ln^2 j + \ln^2 n \ln m + \ln n \ln^2 m).$$

По условию теоремы числа n и m равномерно распределены в пределах $N \le n \le 2N, M \le m \le 2M$. Поэтому

$$..|R_{nm}(\varphi)| \le \frac{A}{NM} \sum_{n=N+1}^{2N} \sum_{m=M+1}^{2N} \Bigg[\sum_{j=1}^{\infty} (\ln^3 j + (\ln n + \ln m) \ln^2 j +$$

$$+ (\ln n + \ln m)^2 \ln j + \ln n \ln^2 m + \ln^2 n \ln m) E_{(nj)\infty} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} (\ln^3 j + (\ln n + \ln m) \ln^2 j + (\ln n + \ln m)^2 \ln j +$$

$$+ \ln^2 n \ln m + \ln n \ln^2 m) E_{\infty(mj)} \Bigg] .$$

Достаточно оценить сумму

$$I = \frac{1}{NM} \sum_{n=N+1}^{2N} \sum_{m=M+1}^{2M} \sum_{j=1}^{\infty} \ln^2 j E_{(nj)\infty} = \frac{1}{N} \sum_{n=N+1}^{2N} \sum_{j=1}^{\infty} \ln^2 j E_{(nj)\infty}.$$

Сумма такого вида (отличающегося от данной лишь степенью $\ln j$) оценивалась в разделе 1.5 главы 3. Повторяя сделанные там выкладки, получаем оценку $I \le O(N^{-r-\alpha-1/2})$. Поэтому

$$..|R_{nm}(\varphi)| \le O((N^{-r-\alpha-1/2} + M^{-r-\alpha-1/2})(\ln^2 n \ln m + \ln n \ln^2 m)).$$

Теорема доказана.

3. Теоретико-числовые методы

Рассмотрим сингулярный интеграл с ядром Гильберта

$$S\varphi = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \cdots \operatorname{ctg} \frac{\sigma_m - s_m}{2} d\sigma_1 \cdots d\sigma_m,$$

который будем вычислять по к.ф.

$$S\varphi = \sum_{k=1}^{N} p_k(s_1, \ldots, s_m) \varphi(\xi_1(k), \ldots, \xi_m(k)) + R_N(s_1, \xi_k, p_k, \varphi) \qquad (3.1)$$

на различных классах функций. Здесь $L_k = (\xi_1(k), \ldots, \xi_m(k))$ $(k = 1, 2, \ldots, N)-$ сетка, определяющая узлы к.ф.

3.1. Класс $\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{m}}^{\alpha}$

3.1.1. Формулировки теорем

Теорема 3.1 [29]. При любом $N > 1$ для всякой сетки $L_k = (\xi_1(k), \ldots, \xi_m(k))$, $(k = 1, 2, \ldots, N)$, найдутся функции $\varphi(t_1, \ldots, t_m) \in \tilde{H}_m^{\alpha}(\alpha > 1)$, такие, что погрешность к.ф. (3.1) удовлетворяет неравенству

$$|R_N(\varphi)| \geq O(N^{-\alpha} \ln^m N).$$

При исследовании погрешности конкретных к.ф. на функции из класса $\tilde{H}_m^{\alpha}$ нужно наложить дополнительные ограничения: будем считать, что модули непрерывности всевозможных производных вида $\partial\varphi^k/\partial t_1^{k_1} \cdots \partial t_m^{k_m}$, $0 \leq k_i \leq \alpha$, $k = k_1 + \cdots + k_m$ по всем переменным t_i удовлетворяют условию $\int\limits_0^{\pi} t_i^{-1} \omega(\partial\varphi^k/\partial t_1^{k_1} \cdots \partial t_m^{k_m}; t_i) dt_i < \infty$. Функции из $\tilde{H}_m^{\alpha}$, удовлетворяющие этому условию, будем обозначать через $\hat{H}_m^{\alpha}$.

Введем функцию $\psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_m; s_1, \ldots, s_m)$, которая строится по функции $\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ следующим образом. Если $m = 1$, то

$$\psi(\sigma_1; s_1) = (\varphi(\sigma_1) - \varphi(s_1)) \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - s_1}{2}.$$

Если $m = 2$, то

$$\psi(\sigma_1, \sigma_2; s_1, s_2) =$$

$$= (\varphi(\sigma_1, \sigma_2) - \varphi(s_1, \sigma_2) - \varphi(\sigma_1, s_2) + \varphi(s_1, s_2)) \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - s_2}{2}.$$

Лемма 3.1 [29]. Пусть $\varphi \in \hat{H}_m^{\alpha}(\alpha \geq 2)$. Тогда при любых значениях $(s_1, s_2, \ldots, s_m) \in [0, 2\pi; \ldots; 0, 2\pi]$ $\psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_m; s_1, \ldots, s_m) \in E_m^{\alpha}$.

Лемма 3.2. Справедливо тождество

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m) \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \cdots \operatorname{ctg} \frac{\sigma_m - s_m}{2} d\sigma_1 \cdots d\sigma_m =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} \psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_m; s_1, \ldots, s_m) d\sigma_1 \cdots d\sigma_m.$$

Из лемм 3.1 и 3.2 следует, что для вычисления сингулярных интегралов вида $S\varphi$ на классах $\hat{H}_m^\alpha$ могут быть использованы все к.ф., предложенные в книге Н.М.Коробова [94] для вычисления регулярных интегралов на классе E_m^α. Остановимся лишь на одном утверждении такого рода. При этом будут использованы обозначения и понятия, введенные в упомянутой выше монографии.

Теорема 3.2 [29]. Пусть $a_1, \ldots, a_m-$ оптимальные коэффициенты по модулю $p, \beta-$ их индекс и $N = p$. Если $\alpha \geq 2$ и $\varphi \in \hat{H}_m^\alpha$, то

$$S\varphi = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\psi\left(\frac{2\pi a_1 k}{p}, \ldots, \frac{2\pi a_m k}{p}\right) + O\left(\frac{\ln^{\alpha\beta} N}{N^\alpha}\right).$$

3.1.2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 3.1. Пусть $D - m$-мерный куб $[0, 2\pi]^m$. Выберем целое n из условия $n = \left[(2N)^{1/m}\right] + 1$($[\alpha]-$ антье α) и разделим каждую из сторон куба на n частей точками $\theta_i^{(k)} = 2k\pi/n, k =$ $= 0, 1, \ldots, n, i = 1, 2, \ldots, m$. Так как $n^m \geq 2N$, то имеется, по крайней мере, N кубов, не содержащих внутри себя ни одной точки L_k. Выделим эти кубы и внутри них построим функцию

$$\varphi^*(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) = \varphi_1^*(\sigma_1) \cdots \varphi_m^*(\sigma_m)$$

по формуле

$$\varphi_i^*(\sigma_i) =$$

$$= \begin{cases} \left(\dfrac{2}{n}\sin\dfrac{n}{2}(\sigma_i - \theta_i^{(k)})\right)^{\alpha + \frac{1}{\ln n}}, & \theta_i^{(k)} \leq \sigma_i \leq \theta_i^{(k+1)}, \operatorname{ctg}\dfrac{\sigma_i - \xi_i}{2} > 0; \\ -\left(\dfrac{2}{n}\sin\dfrac{n}{2}(\sigma_i - \theta_i^{(k)})\right)^{\alpha + \frac{1}{\ln n}}, & \theta_i^{(k)} \leq \sigma_i \leq \theta_i^{(k+1)}, \operatorname{ctg}\dfrac{\sigma_i - \xi_i}{2} < 0, \end{cases}$$

$i = 1, 2, \ldots, m$. Узлы ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ будут определены ниже.

Предположим теперь для простоты, что $m = 2$. Это предположение, как следует из приводимого ниже доказательства, не ограничивает общности результатов. Будем называть квадраты, в которых отсутствуют узлы L_k, отмеченными. Квадрат $[0, 2\pi; 0, 2\pi]$ был разбит на n строк и n столбцов. Будем называть строку отмеченной, если среди всех квадратов, входящих в строку, $n/4 + 1$ квадратов являются отмеченными.

При доказательстве теоремы 2.16 было показано, что число отмеченных строк не менее $n/3$. Обозначим через $\theta(k,l)$ отношение числа отмеченных строк среди $s_{k+1},\ldots,s_l$ к общему числу строк $(l-k)$. Здесь $k=0,1,\ldots,n-1,\ l=k+1,\ldots,n-1$. При доказательстве теоремы 2.16 было доказано, что существует $\bar{k}<4n/5$, для которого $\min\limits_{l>\bar{k}}\theta(\bar{k},l)\geq 1/8$.

Перейдем теперь к отмеченным строкам. Как было определено выше, в отмеченной строке имеется не менее $n/4+1$ отмеченных квадратов. Обозначим через $\theta_1(k,l)$ отношение числа отмеченных квадратов $k_{k+1},\ldots,k_l$ к общему числу $(l-k)$ квадратов. При доказательстве теоремы 2.16 было показано, что существует $\bar{k}_1=5n/6$, для которого $\min\limits_{l>k}\theta_1(k,l)\geq 1/10$. Очевидно, приведенные рассуждения распространяются на случай любого конечного m.

Возьмем в качестве точек $\xi_1,\ldots,\xi_m$ точки $\xi_i=(\bar{k}_i-1)2\pi/n$ и подставим функцию φ^* в интеграл $S\varphi$. В результате подстановки имеем

$$|S\varphi^*|=\left|\frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_0^{2\pi}\cdots\int\limits_0^{2\pi}\varphi^*(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)\times\right.$$

$$\left.\times\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-\xi_1}{2}\cdots\operatorname{ctg}\frac{\sigma_m-\xi_m}{2}d\sigma_1\cdots d\sigma_m\right|=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^m}\left|\sum_{k_1=0}^{n}\cdots\sum_{k_m=0}^{n}{}'\int\limits_{\frac{2k_1\pi}{n}}^{\frac{2(k_1+1)\pi}{n}}\cdots\int\limits_{\frac{2k_m\pi}{n}}^{\frac{2(k_m+1)\pi}{n}}\varphi^*(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)\times\right.$$

$$\left.\times\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-\xi_1}{2}\cdots\operatorname{ctg}\frac{\sigma_m-\xi_m}{2}\cdots d\sigma_1\cdots d\sigma_m\right|\geq O(N^{-\alpha}\ln^m N).$$

Здесь $\sum'$ означает суммирование по отмеченным квадратам.

Теорема доказана.

Доказательство леммы 3.1 проведем по индукции. Пусть $m=1$ и $k\neq 0$. Пользуясь формулой обращения Гильберта [63], представим интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi}(\varphi(\sigma)-\varphi(s))\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{ik}\sigma}\mathrm{d}\sigma$$

в виде

$$\int\limits_0^{2\pi}(\varphi(\sigma)-\varphi(s))\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\mathrm{s}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{ik}\sigma}\mathrm{d}\sigma=$$

$$=-i\int\limits_0^{2\pi}(\varphi(\sigma)-\varphi(s))e^{ik\sigma}d\sigma+2\int\limits_\gamma\frac{\varphi(\frac{1}{i}\ln\tau)-\varphi(\frac{1}{i}\ln t)}{\tau-t}\tau^k d\tau=$$

$$=-i\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\sigma)e^{ik\sigma}d\sigma+2\int\limits_\gamma\frac{\varphi(\frac{1}{i}\ln\tau)-\varphi(\frac{1}{i}\ln t)}{\tau-t}\tau^k d\tau,$$

где $\gamma-$ единичная окружность с центром в начале координат, $\tau=e^{i\sigma}$, $t=e^{is}$.

Первое слагаемое в правой части предыдущего выражения есть коэффициент Фурье c_k функции $\varphi(s)$. Поэтому для доказательства справедливости леммы при $m=1$ нужно оценить второе слагаемое при произвольном фиксированном $t\in\gamma$.

Обозначим через $F(\tau,t)$ функцию $F(\tau,t)=(\varphi(-i\ln\tau)-\varphi(-i\ln t)/(\tau-$ $-t)$, подразумевая $F(t,t)=d\varphi(-i\ln\tau)/d\tau$. В книге Н.И. Мусхелишвили [191] показано, что

$$\frac{\partial^n F(\tau,t)}{\partial\tau^n}=$$

$$=\frac{1}{\tau-t}\left\{\frac{d^n\varphi(-i\ln\tau)}{d\tau^n}-n\int\limits_0^1 u^{n-1}d^n\varphi(-i\ln t+u(-i(\ln\tau-\ln t)))du\right\}.$$

Отметим, что при использовании этой формулы предполагается, что функция $\varphi(-i\ln\tau)$ допускает распространение на некоторую окрестность кривой γ.

Оценим модуль интеграла

$$J\varphi=\int\limits_\gamma\frac{\varphi(\frac{1}{i}\ln\tau)-\varphi(\frac{1}{i}\ln t)}{\tau-t}\tau^k d\tau.$$

Для этого проинтегрируем его α раз по частям, полагая $k>\alpha$.

Имеем

$$|J\varphi|=|\int\limits_\gamma F(\tau,t)\tau^k d\tau|=\frac{A}{k(k-1)\cdots(k-\alpha+1)}|\int\limits_\gamma\frac{\partial^\alpha F(\tau,t)}{\partial\tau^\alpha}\tau^{k-\alpha}d\tau|\leq$$

$$\leq \frac{A\alpha!}{k^\alpha} \leq \frac{A}{k^\alpha},$$

где $A-$ константа.

Из проделанных выкладок следует, что функция $\psi(\sigma, s) \in E_1^\alpha$ при любом фиксированном $s \in [0, 2\pi]$.

Пусть теперь $m = 2$. Тогда

$$\psi(\sigma_1, \sigma_2; s_1, s_2) = \Bigg\{ [\varphi(\sigma_1, \sigma_2) - \varphi(s_1, \sigma_2)] \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - s_1}{2} -$$

$$-[\varphi(\sigma_1, s_2) - \varphi(s_1, s_2)] \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \Bigg\} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - s_2}{2}.$$

Повторяя выкладки, проделанные выше при $m = 1$, убеждаемся, что если $\varphi \in \hat{H}_1^\alpha$, то $\psi \in E_2^\alpha$. При любом конечном $m = 3, 4, \cdots$ лемма доказывается аналогично.

Доказательство леммы 3.2 следует из равенства

$$\int\limits_0^{2\pi} \varphi(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma = 0.$$

Доказательство теоремы 3.2 следует из лемм 3.1 и 3.2 и теоремы 12 из книги Н.М.Коробова [94].

3.2. Класс $\mathbf{D}_\mathbf{s}^\alpha$

3.2.1. Формулировки теорем

Теорема 3.3 [29]. При любом $N > 1$ для всякой сетки $L_k(\xi_1(k), \ldots, \xi_m(k))$, $k = 1, 2, \ldots, N$, найдется функция $\varphi(\sigma, \ldots, \sigma_m) \in \in \tilde{D}_m^\alpha$, $\alpha > 1$, такая, что погрешность к.ф. (3.1) удовлетворяет неравенству $|R| \geq O(N^{-\alpha} \ln^m N)$.

Для вычисления интеграла $S\varphi$ можно использовать к.ф.

$$S\varphi = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} P_N[\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)] \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \cdots \times$$

$$\times \cdots \operatorname{ctg} \frac{\sigma_m - s_m}{2} d\sigma_1 \cdots d\sigma_m + R_N(\varphi), \tag{3.2}$$

где $P_N = P^n_{\sigma_1} \cdots P^n_{\sigma_m}[\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)]$, $N = n^m$, $P^n_{\sigma_i}$– оператор проектирования на множество тригонометрических интерполяционных полиномов степени n по узлам $\sigma_i^{(k)} = 2k\pi/(2n+1)$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Теорема 3.4 [29]. На классе функций $\tilde{D}^\alpha_m$ к.ф. (3.2) имеет место погрешность $R_N = 0(N^{-\alpha} \ln^m N)$.

3.2.2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 3.3. Повторим рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 3.1, взяв в качестве функции $\varphi^*(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)$ функцию, определенную в отмеченном кубе $[\theta_1^{(k_1)},\theta_1^{(k_1+1)},\ldots,\theta_m^{(k_s)},\theta_m^{(k_s+1)}]$ формулой $\varphi^*(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)=$ $=\varphi_1^*(\sigma_1)\cdots\varphi_m^*(\sigma_m)n^{(\alpha m+1/\ln n)(2m-1)}$, где $\varphi_i^*(\sigma_i)=((\sigma_i-\theta_i^{(k_i)})(\theta_i^{(k_i+1)}-$ $-\sigma_i))^{\alpha m+\frac{1}{\ln n}}, k_i>\bar{k}_i$.

Аналогичным образом функция $\varphi^*(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)$ определяется в отмеченных кубах при $k_i>\bar{k}_i$. В остальных кубах $\varphi^*(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)\equiv 0$. Подставляя $\varphi^*(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)$ в интеграл $S\varphi$, имеем $|S\varphi^*|\geq O(N^{-\alpha}\ln^m N)$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3.4. Для простоты ограничимся двумерным случаем. Обозначим через $U_\varphi(\sigma_1,\sigma_2)$ тригонометрический полином наилучшего равномерного приближения степени не выше n по каждой переменной к функции $\varphi(\sigma_1,\sigma_2)$. Тогда

$$|R_N(\varphi)|=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\left|\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\varphi(\sigma_1,\sigma_2)-P_N[\varphi(\sigma_1,\sigma_2)])\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2-s_2}{2}d\sigma_1 d\sigma_2\right|=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\left|\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\varphi(\sigma_1,\sigma_2)-U_\varphi(\sigma_1,\sigma_2)-P_N[\varphi(\sigma_1,\sigma_2)-U_\varphi(\sigma_1,\sigma_2)])\times\right.$$

$$\left.\times\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2-s_2}{2}d\sigma_1\sigma_2\right|.$$

Обозначим $\varphi(\sigma_1,\sigma_2)-U_\varphi(\sigma_1,\sigma_2)$ через $D_\varphi(\sigma_1,\sigma_2)$ и рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}D_\varphi(\sigma_1,\sigma_2)\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2-s_2}{2}d\sigma_1 d\sigma_2=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(D_\varphi(\sigma_1,\sigma_2)-D_\varphi(\sigma_1,s_2)-D_\varphi(s_1,\sigma_2)+D_\varphi(s_1,s_2))\times$$

$$\times\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2-s_2}{2}d\sigma_1 d\sigma_2.$$

Известно (см. [146]), что на классе D_s^α $|\varphi(\sigma_1,\sigma_2)-U_\varphi(\sigma_1,\sigma_2)| = O(N^{-\alpha})$. Следовательно, функция $D_\varphi(\sigma_1,\sigma_2)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $1/\ln N$ и с коэффициентом $AN^{-\alpha+1/\ln N}$ по каждой переменной. Тогда

$$|D_\varphi(\sigma_1,\sigma_2)-D_\varphi(\sigma_1,s_2)-D_\varphi(s_1,\sigma_2)+D_\varphi(s_1,s_2)| \le \\ \le AN^{-\alpha+1/\ln N}|\sigma_1-s_1|^{1/2\ln N}|\sigma_2-s_2|^{1/2\ln N}$$

и, следовательно,

$$\left|\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} D_\varphi(\sigma_1,\sigma_2)\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-s_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2-s_2}{2}d\sigma_1 d\sigma_2\right| \le AN^{-\alpha}\ln^2 N. \qquad (3.3)$$

Так как [188] на классе периодических функций справедливо неравенство $\|S(P_N\varphi)\|_C \le A\ln^2 N\|\varphi\|_C$ [188], то

$$\|S(P_N(\varphi-U_\varphi))\|_C \le A\ln^2 N\|\varphi-U_\varphi\|_C \le AN^{-\alpha}\ln^2 N.$$

Отсюда и из неравенства (3.3) следует, что $\|S(\varphi-P_N[\varphi])\| = O(N^{-\alpha}\ln^2 N)$.

Распространение приведенных выкладок на случай любого конечного числа переменных m очевидно. Теорема доказана.

3.3. Класс $\mathbf{E}_\mathbf{s}^\alpha$

3.3.1. Формулировки теорем

Теорема 3.5 [29]. При любом $N>1$ для всякой сетки $M_k = (\xi_1(k),\ldots,\xi_m(k))$, $k=1,2,\ldots,N$, найдется функция $\varphi(t_1,\ldots,t_m)\in \tilde{E}_m^\alpha, \alpha>1$, такая, что погрешность к.ф. (3.1) удовлетворяет неравенству

$$\max_{s_1,\ldots,s_m}|R(s_1,\ldots,s_m)| \ge O(N^{-(\alpha-1)}).$$

В следующих теоремах для простоты обозначений будем полагать $m=2$. Из их доказательства легко заметить, что они справедливы для любого конечного m.

Теорема 3.6 [29]. Если $N=n^2$ и $f(\sigma_1,\sigma_2)\in \tilde{E}_2^\alpha, (\alpha>1)$, то для погрешности к.ф.

$$Sf = \frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\psi\left(\frac{2\pi k_1}{n},\frac{2\pi k_2}{n}\right)+R(f),$$

где

$$\psi(\sigma_1,\sigma_2) = (f(\sigma_1,\sigma_2) - f(\sigma_1,s_2) - f(s_1,\sigma_2) + f(s_1,s_2))\times$$
$$\times \operatorname{ctg}\frac{\sigma_1 - s_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2 - s_2}{2}$$

справедлива оценка $R(f) = O(N^{-(\alpha-1)/2})$.

Теорема 3.7 [29]. Пусть $p > 2; \alpha_1, \alpha_2-$ оптимальные коэффициенты по модулю $p, \beta-$ их индекс и $N = p$. Если $f(\sigma_1,\sigma_2) \in \tilde{E}_2^\alpha(C)$, то для погрешности к.ф.

$$Sf = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\psi\left(\left\{\frac{2\pi\alpha_1 k}{p}\right\}, \left\{\frac{2\pi\alpha_2 k}{p}\right\}\right) + R_N(f)$$

справедлива оценка $|R_N(f)| \le CN^{-(\alpha-1)}\ln^{\alpha\beta} N$, где $C-$ константа, зависящая только от α и от кратности интеграла.

Замечание 1. В формулировке теоремы 3.7 использованы понятия оптимальных коэффициентов и их индекса, введеные в монографии Н.М.Коробова [94].

Замечание 2. В случае если точки s_1 и s_2 совпадают с узлами кубатурной формулы, то под $\psi(s_1,s_2)$ понимается предел $\psi(s_1,s_2) = \lim\limits_{\sigma_1\to s_1,\sigma_2\to s_2}\psi(\sigma_1,\sigma_2)$. Аналогичным образом определяются функции $\psi(s_1,\sigma_2)$ и $\psi(\sigma_1,s_2)$.

Доказательства теорем 3.6 и 3.7 основаны на леммах 3.2 и 3.3.

Лемма 3.3. Пусть $\varphi(\sigma_1,\sigma_2) \in \tilde{H}_2^\alpha(\alpha > 1)$. Тогда функция

$$\psi(\sigma_1,\sigma_2,s_1,s_2) = (\varphi(\sigma_1,\sigma_2) - \varphi(s_1,\sigma_2) - \varphi(\sigma_1,s_2) + \varphi(s_1,s_2))\times$$
$$\times \operatorname{ctg}\frac{\sigma_1 - s_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2 - s_2}{2}$$

принадлежит классу функций $\tilde{E}_2^{\alpha-1}$ при любых s_1 и s_2 из сегмента $[0, 2\pi]$.

Очевидно, что аналогичным образом на сингулярные интегралы $S\varphi$ могут быть перенесены и другие утверждения о к.ф. на классе E_m^α, приведенные в книге Н.М.Коробова [94].

3.3.2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 3.5. Как и выше, выделим N кубов, не содержащих точек сетки M_k. Среди этих кубов выберем один, скажем, куб с координатами $(\theta_1^{(k)}, \theta_1^{(k+1)}, \ldots, \theta_m^{(k)}, \theta_m^{(k+1)})$, и в качестве точки $(s_1, \ldots, s_m)$ возьмем $(\theta_1^{(k)}, \ldots, \theta_m^{(k)})$. В выделенном кубе вводится функция

$$\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) = \varphi(\sigma_1 - \theta_1^{(k)}) \cdots \varphi(\sigma_m - \theta_m^{(k)}),$$

где

$$\varphi(\sigma_i - \theta_i^{(k)}) = \left(\frac{1}{n} \sin \frac{n}{2}(\sigma_i - \theta_i^{(k)})\right)^{\alpha-1},$$

если $\theta_i^{(k)} \le \sigma_i \le \theta_i^{(k)} + 2\pi/n, \operatorname{ctg} \frac{\sigma_i - \theta_i^{(k)}}{2} > 0$, и вводится $\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) = 0$ в остальных кубах.

Известно [94], что $\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \in \tilde{E}_m^\alpha$. Подставив φ в сингулярный интеграл Sf, имеем

$$|S\varphi| = \left| \prod_{j=1}^m \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi(\sigma_j - \theta_j^{(k)}) \operatorname{ctg} \frac{\sigma_j - \theta_j^{(k)}}{2} d\sigma \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\theta_1^{(k)}}^{\theta_1^{(k+1)}} \left(\frac{1}{n} \sin \frac{n}{2}(\sigma_1 - \theta_1^{(k)})\right)^{\alpha-1} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - \theta_1^{(k)}}{2} d\sigma_1 \right|^m = O(N^{-(\alpha-1)}).$$

Теорема доказана.

Доказательство леммы 3.3. Достаточно показать, что

$$a_m(\cos m\sigma - \cos ms) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} =$$

$$= a_m \sum_{k=0}^m \left(\alpha_k(s) \cos k\sigma + \beta_k(s) \sin k\sigma\right), \tag{3.4}$$

$$b_m(\sin m\sigma - \sin ms) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} =$$

$$= b_m \sum_{k=0}^m \left(\bar{\alpha}_k(s) \cos k\sigma + \bar{\beta}_k(s) \sin k\sigma\right), \tag{3.5}$$

причем функции $\alpha_k(s), \bar{\alpha}_k(s), \beta_k(s), \bar{\beta}_k(s)$ по абсолютной величине не превышают числа 2.

Так как доказательства тождеств (3.4) и (3.5) проводятся аналогично, то остановимся на первом. По известной формуле тригонометрии

$$(\cos m\sigma - \cos ms)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2} = -2\sin\frac{m(\sigma+s)}{2}\sin\frac{m(\sigma-s)}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}.$$

Предположим вначале, что $m-$ нечетное ($m = 2n+1$). Тогда [112]

$$\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\sigma - s)}{2\sin\frac{\sigma-s}{2}} = \frac{1}{2} + \cos(\sigma - s) + \cdots + \cos n(\sigma - s).$$

Отсюда следует, что

$$2\sin\frac{m(\sigma+s)}{2}\sin\frac{m(\sigma-s)}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2} =$$

$$= 4\sin\frac{m(\sigma+s)}{2}\cos\frac{\sigma-s}{2}\left[\frac{1}{2} + \cos(\sigma-s) + \cdots + \cos n(\sigma-s)\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{2n+1}(\alpha_k(s)\cos k\sigma + \beta_k(s)\sin k\sigma),$$

где $\alpha_k(s)$ и $\beta_k(s)$ по модулю не превосходят числа 2.

Аналогичным образом исследуется случай четного m ($m = 2n$)

$$(\cos m\sigma - \cos ms)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2} = \sum_{k=0}^{2n}(\bar{\alpha}_k(s)\cos k\sigma + \bar{\beta}_k(s)\sin k\sigma),$$

где $\bar{\alpha}_k(s)$ и $\bar{\beta}_k(s)$ по модулю не превосходят числа 2.

Отсюда можно сделать вывод о справедливости леммы. В самом деле,

$$a_{nm}\left\{(\cos n\sigma_1\cos m\sigma_2 - \cos n\sigma_1\cos ms_2)\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2 - s_2}{2} - \right.$$

$$\left. -(\cos ns_1\cos m\sigma_2 - \cos ns_1\cos ms_2)\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2-s_2}{2}\right\}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1-s_1}{2} =$$

$$= a_{nm}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}(\alpha_{jk}^{nm}(s_1,s_2)\cos k\sigma_2\cos j\sigma_1 + \beta_{jk}^{nm}(s_1,s_2)\cos j\sigma_1\sin k\sigma_2 +$$

$$+\gamma_{jk}^{nm}(s_1,s_2)\sin j\sigma_1\cos k\sigma_2 + \delta_{jk}^{nm}(s_1,s_2)\sin j\sigma_1\sin k\sigma_2),$$

причем все коэффициенты $\alpha_{kj}, \beta_{kj}, \gamma_{kj}, \delta_{kj}$ не превосходят числа 4.

Воспользовавшись полученным выражением, легко видеть, что при разложении функции $\psi(\sigma_1, \sigma_2, s_1, s_2)$ в ряд Фурье по функциям $\left\{e^{i(k_1\sigma_1+k_2\sigma_2)}\right\}$ коэффициент Фурье, соответствующий $\cos n\sigma_1 \cos m\sigma_2$, имеет вид

$$\bar{a}_{nm} = \sum_{i=n}^{\infty}\sum_{j=m}^{\infty} a_{ij}\alpha_{ij}^{nm}(s_1, s_2).$$

Отсюда следует

$$|\bar{a}_{nm}| \le 4\sum_{i=n}^{\infty}\sum_{j=m}^{\infty} |a_{ij}| \le A|\bar{n}\bar{m}|^{-(\alpha-1)},$$

где $|\bar{m}| = \max(1, |m|)$. Лемма доказана.

Доказательства теорем 3.6. и 3.7. Справедливость этих теорем вытекает из теорем 3 и 12 монографии Н.М.Коробова [94] и леммы 3.3.

4. Оптимальная регуляризация многомерных сингулярных интегралов

Пусть оператор F вычисляется в пространстве C. Постановка задачи построения оптимальных регуляризаторов операторов в функциональных пространствах приведена в разд. 3 главы 3.

Теорема 4.1 [29]. Пусть $\Psi = H_{1,1}(1)$. Тогда

$$E_N(F, \Psi) = (1 + o(1))\frac{8\ln L}{\pi L}, \tag{4.1}$$

где L и N связаны соотношением $N = 4\pi^{-2}\ln^2 L$. Оператор

$$F^*\varphi = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{D\setminus\Omega}\int \varphi(\sigma_1, \sigma_2)\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1 - s_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2 - s_2}{2}d\sigma_1 d\sigma_2, \tag{4.2}$$

где $\Omega = [s_1 - \pi/L, s_1 + \pi/L; 0, 2\pi] \cup [0, 2\pi; s_2 - \pi/L, s_2 + \pi/L]$, $D = [0, 2\pi]^2$, реализует равенство (4.1) в сильной асимптотике.

Доказательство. В метрике пространства C оценим снизу величину функционала $\Phi(\mu) = \sup_{\varphi\in\Psi, \|\varphi\|\le\mu} \|F\varphi\|_C$, где $\mu = \pi/L$. Введем функцию

$$\psi(\sigma_1, \sigma_2) = \min\left(\frac{\pi}{L}, \min_{i,j}(|\sigma_1 - (s_1 \pm \pi i)|, |\sigma_2 - (s_2 \pm j\pi)|)\right).$$

Тогда

$$\Phi(\mu) = \sup_{\varphi\in\Psi,\|\varphi\|\le\mu} \max_{s_1,s_2} |(F\varphi)(s_1,s_2)| \ge$$

$$\ge \frac{1}{\pi L} \int\limits_{\pi/L}^{\pi-\pi/L} \int\limits_{\pi/L}^{\pi-\pi/L} \operatorname{ctg}\frac{\sigma_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 +$$

$$+\frac{2}{\pi^2} \int\limits_{0}^{\pi/L} \int\limits_{\pi/L}^{\pi-\pi/L} \sigma_1 \operatorname{ctg}\frac{\sigma_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_2}{d} \sigma_1 d\sigma_2 \sim \frac{4\ln^2 L}{\pi L} + \frac{8\ln L}{\pi L}. \qquad (4.3)$$

Так как $N = 4\pi^{-2}\ln^2 L$, то из теоремы С.Б.Стечкина [139] (см. также разд. 3 главы 3) следует справедливость неравенства (4.1).

Норма оператора $F^*\varphi$ равна $\|F^*\|_C \le (1+o(1))4\pi^{-2}\ln^2 L$.

Оценим норму

$$\|F\varphi - F^*\varphi\|_C = \left| \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\Omega}\int \varphi(\sigma_1,\sigma_2) \operatorname{ctg}\frac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg}\frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\Omega}\int (\varphi(\sigma_1,\sigma_2) - \varphi(s_1,\sigma_2) - \varphi(\sigma_1,s_2) + \varphi(s_1,s_2)) \times \right.$$

$$\left. \times \operatorname{ctg}\frac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg}\frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 \right| \le \left| \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\Omega_0}\int W(\sigma_1,\sigma_2,s_1,s_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \right| +$$

$$+ \left| \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_0}\int W(\sigma_1,\sigma_2,s_1,s_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \right| = I_1 + I_2,$$

где $\Omega_0 = [s_1 - \pi/L, s_1 + \pi/L; s_2 - \pi/L, s_2 + \pi/L]$, $W(\sigma_1,\sigma_2,s_1,s_2) =$
$= (\varphi(\sigma_1,\sigma_2) - \varphi(s_1,\sigma_2) - \varphi(\sigma_1,s_2) + \varphi(s_1,s_2)) \operatorname{ctg}\dfrac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg}\dfrac{\sigma_2 - s_2}{2}$.

Нетрудно видеть, что

$$I_1 \le \frac{32}{\pi L} + o(1), \;\; I_2 \le \frac{8\ln L}{\pi L} + o(1), \qquad (4.4)$$

и, следовательно,

$$\|F\varphi - F^*\varphi\|_C \le \frac{8\ln L}{\pi L} + o(1). \qquad (4.5)$$

Теорема доказана.

5. Полисингулярные интегралы с ядром Коши

Рассмотрим интеграл

$$K\varphi = \int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 \frac{\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_m) d\tau_1 \cdots d\tau_m}{(\tau_1 - t_1) \cdots (\tau_m - t_m)},$$

который будем вычислять по кубатурным формулам

$$K\varphi = \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_m=1}^{n} \sum_{l_1=0}^{\rho_1} \cdots \sum_{l_m=0}^{\rho_m} p_{k_1 \cdots k_m l_1 \cdots l_m}(t_1, \ldots, t_m) \varphi^{(l_1, \ldots, l_m)}(t_{k_1}, \ldots, t_{k_m}) +$$

$$+ R_{n \cdots n}(t_i, p_{k_1 \cdots k_m l_1 \cdots l_m}, t_{k_i}, \varphi), \tag{5.1}$$

$$K\varphi = \sum_{k=1}^{N} p_k(t_1, \ldots, t_m) \varphi(M_k) + R_N(t_i, p_k, M_k, \varphi). \tag{5.2}$$

Вначале остановимся на вычислении верхних граней оценок снизу погрешностей к.ф. вида (5.1) и (5.2).

5.1. Формулировки теорем

Теорема 5.1 [36]. Пусть $N = n^m$, $\Psi = H_j^\alpha$, $j = 1, 3$ и интеграл $K\varphi$ вычисляется по к.ф. (5.1) при $\rho = 0$ (при $j = 3$ полагаем $m = 2$). Тогда справедливы оценки

$$\zeta_N[H_1^\alpha] \geq (1 + o(1)) 2^{m-\alpha} N^{-\alpha/m} m (1 + \alpha)^{-1} \ln^m N,$$

$$\zeta_N[H_3^\alpha] \geq 16(1 + o(1)) N \ln^2 N \int\limits_0^{1/2n} \int\limits_0^{1/2n} \omega(\sqrt{t^2 + \tau^2}) dt d\tau.$$

Теорема 5.2 [36]. Пусть $\Psi = H_j^\alpha, j = 1, 2, 3$ и интеграл $K\varphi$ вычисляется по к.ф. вида (5.2) (при $j = 2, 3$ полагаем $m = 2$). Тогда справедлива оценка

$$\zeta_N[H_j^\alpha] \geq (1 + o(1)) 2^m D_j N^{-\alpha/m} \ln^m N,$$

где

$$D_1 = 2^{1-\alpha}/(2 + \alpha), \ D_2 = 2^{1-\alpha/2}/(2 + \alpha),$$

$$D_3 = \frac{12}{2+\alpha}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^{(\alpha+2)/2}\int\limits_0^{\pi/6}\frac{d\varphi}{\cos^{\alpha+2}\varphi}.$$

Теорема 5.3 [36]. Пусть $\Psi = W^{r,r}(1)$ и интеграл $K\varphi$ вычисляется по к.ф. (5.1) при $\rho_i = r-1,\ i=1,2$. Тогда справедлива оценка

$$\zeta_N[\Psi] \geq \frac{(1+o(1))2^m m \ln^m N}{4^r N^{r/m} r!}.$$

Теорема 5.4. Пусть $\Psi = H_j^\alpha,\ j=1,3$. Среди к.ф. (5.1) при $\rho = 0$ асимптотически оптимальной при $1/n \leq t_i \leq 1-1/n, i=1,2,\ldots,m$, является формула

$$K\varphi = \sum_{k_1=1}^{n-1}\cdots\sum_{k_m=1}^{n-1}\varphi(t'_{k_1},\ldots,t'_{k_m})\int\limits_{d_{k_1\cdots k_m}}\int\frac{d\tau_1\cdots d\tau_m}{(\tau_1-t_1)\cdots(\tau_m-t_m)} + R_N(\varphi),$$

где $d_{k_1\cdots k_m} = \Delta_{k_1\cdots k_m}\cap C_{\Delta_0}$, $\Delta_{k_1\cdots k_m} = [t_{k_1}, t_{k_1+1};\cdots;t_{k_m}, t_{k_m+1}]$, $t_k = k/n$, $t'_k = (t_k+t_{k+1})/2$, $\Delta_0 = [t_1-1/n, t_1+1/n; 0,1;\ldots;0,1]\cup\cdots\cup[0,1;\ldots;0,1;t_m-1/n, t_m+1/n]$, C_{Δ_0}–дополнение Δ_0 до куба $D=[0,1]^m$.

Пусть при $j=1$ $m\geq 2$, а при $j=2,3$ $m=2$. Введем обозначения: $\lambda_N = (1/N)^{1/m}, \lambda_{N,1} = \lambda_N/2, \lambda_{N,2} = \lambda_N/\sqrt{2}, B_1(N) = \{x\in E^m, \rho_1(x,\theta)\leq\lambda_N/2\}$, $B_2(N) = \left\{x\in E^2, \rho_2(x,\theta)\leq\lambda_N/\sqrt{2}\right\}$, $B_3(N)$– правильный шестиугольник площадью $1/N$ с центром в точке $(0,0)$, $\theta=(0,\ldots,0)$. Пусть $\Delta_{m,1}$– решетка с базисом $l_{1,1} = (\lambda_N, 0\ldots,0)$, $l_{2,1} = (0,\lambda_N,0,\ldots,0),\ldots,$ $l_{m,1} = (0,\ldots,0,\lambda_N)$; $\Delta_{m,2}$– решетка с базисом $l_{1,2} = (\lambda_{N,2},\lambda_{N,2})$, $l_{2,2} = (\lambda_{N,2},-\lambda_{N,2})$, $\Delta_{m,3}$– решетка с базисом $l_{1,3} = (\sqrt{2/\sqrt{3}N},0)$, $(\sqrt{1/\sqrt{3}N},\sqrt{\sqrt{3}/N})$.

Покроем куб $D=[0,1]^m$ конгруентными областями с центрами в точках решетки. Пусть покрытие состоит из N областей. Перенумеруем, введя обозначения B_k, элементы решетки, попавшие в куб D, и обозначим через $\Delta_j(k)$ область с центром в k элементе решетки, причем расстояние между элементами $\Delta_j(k)$ и k-м элементом решетки вычисляется в метрике ρ_j $(j=1,2,3)$. (Метрика ρ_j описана при определении класса функций H_j^α, $j=1,2,3$).

Рассмотрим кубатурную формулу

$$K\varphi = \sum_{k=1}^{N} \varphi(B_k) \int\limits_{\Delta_j(k)\cap D\cap G(B_k)} \cdots \int \frac{d\tau_1 \cdots d\tau_m}{(\tau_1 - t_1)\cdots(\tau_m - t_m)} + R_N(\varphi) \quad (5.3)$$

$$\left(\frac{2}{n} \le t_i \le 1 - \frac{2}{n}\right),$$

где $B_k = (b_{1k}, \ldots, b_{mk}),\ G(B_k)-$ дополнение области

$$\left[b_{1k} - \frac{3}{n}, b_{1k} + \frac{3}{n}; 0,1; \ldots; 0,1\right] \cup \left[0,1; b_{2k} - \frac{3}{n}, b_{2k} + \frac{3}{n}; 0,1; \ldots; 0,1\right] \cup$$

$$\cup \cdots \cup \left[0,1; \ldots; 0,1; b_{mk} - \frac{3}{n}, b_{mk} + \frac{3}{n}\right]$$

до области D.

Теорема 5.5 [36]. Пусть $N = n^m$ и $\Psi = H_j^{\alpha},\ j = 1,2,3$. Среди всевозможных к.ф. вида (5.2) асимптотически оптимальной является формула (5.3).

Для простоты положим $m = 2$. Пусть $\Delta_{kl} = [t_k, t_{k+1}; t_l, t_{l+1}]$, где $t_k = k/n$. Через φ_{nm} обозначим сплайн, описанный в теореме 2.9.

Рассмотрим к.ф.

$$K\varphi = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{\varphi_{nn}(\tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} d\tau_1 d\tau_2 + R_{nn}(\varphi),$$

$$\left(\frac{2}{n} < t_i < 1 - \frac{2}{n}, i = 1,2\right). \quad (5.4)$$

Теорема 5.6 [36]. Пусть $N = n^2, \Psi = W^{r,r}(1)$. Среди к.ф. вида (5.1) при $\rho_i = r - 1,\ i = 1,2$ асимптотически оптимальной является формула (5.4), имеющая погрешность $R_N[\Psi] = (1 + o(1))N^{-r/2}\ln^2 N$.

Теорема 5.7. Пусть $N = n^2, \Psi = W^{r,r}(1)$. Среди к.ф. вида (5.1) при $\rho_i = 0, i = 1,2$, асимптотически оптимальной является формула

$$K\varphi = \sum_{k=0}^{M-1}{}' \sum_{l=0}^{M-1}{}' l_{L,L} \frac{\varphi(\Delta_{kl})}{(\upsilon_k - t_1)(\upsilon_l - t_2)} +$$

$$+\sum_{k=0}^{M-1}{}'\sum_{l=0}^{M-1}{}'\psi(\prod_{n,n}(T_{r-1}\varphi(\upsilon_k,\upsilon_l)),\Delta_{kl})+$$

$$+\sum_{k=0}^{M-1}{}'\psi(\prod_{n,n}(T_{r-1}\varphi(\upsilon_k,\upsilon_l)),\Delta_{k,j-1}\cup\cdots\cup\Delta_{k,j+2})+$$

$$+\sum_{l=0}^{M-1}{}'\psi(\prod_{n,n}(T_{r-1}\varphi(\upsilon_{i-1},\upsilon_l)),\Delta_{i-1,l}\cup\cdots\cup\Delta_{i+2,l})+$$

$$+\psi\left(\prod_{n,n}(T_{r-1}\varphi(\upsilon_{i-1},\upsilon_{j-1}))[\upsilon_{i-1},\upsilon_{i+2},\upsilon_{j-1},\upsilon_{j+2}]\right)+R(\varphi),$$

где $\upsilon_k=k/M,\ k=0,1,\ldots,M,\ M=[n/L],\ L=[\ln^{1/r}n]$,
$\Delta_{kl}=[\upsilon_k,\upsilon_{k+1};\upsilon_l,\upsilon_{l+1}],\psi(\varphi,\Delta_{kl})=\int\limits_{\Delta_{kl}}\int\varphi(\tau_1,\tau_2)(\tau_1-t_1)^{-1}(\tau_2-t_2)^{-1}d\tau_1d\tau_2$,
$(s_1,s_2)\in\Delta_{i,j},\sum_k'\left(\sum_l'\right)$ означает суммирование по $k\neq i-1,\ldots,i+2(l\neq$ $\neq j-1,\ldots,j+2)$, имеющая погрешность

$$R_N[\Psi]=(1+o(1))8\ln^2 n\inf_c\|B_r^*(t)-c\|_{L_1[0,1]}n^{-r}.$$

5.2. Доказательства теорем

Доказательства теорем 5.1 – 5.6 проводятся по одной схеме. Поэтому проведем достаточно подробно доказательство теоремы 5.1 и отметим изменения, которые нужно провести при доказательстве других теорем. При этом для простоты обозначений ограничимся двумерным случаем.

Доказательство теоремы 5.1. Пусть $\Psi=H_1^\alpha$. Введем точки $\upsilon_k=k/M$, $M=[n/\sqrt{\ln n}]$ и обозначим через $\{w_i,w_j\}$ множество точек, объединяющее узлы $\{t_{k_1},t_{k_2}\}$, и точки $\{\upsilon_{j_1},\upsilon_{j_2}\}$, $k_l=1,2,\ldots,n$, $j_l=$ $=1,2,\ldots,M$, $l=1,2$. Обозначим через $\psi(t_1,t_2)$ функцию, входящую в класс H_1^α и обращающуюся в нуль в точках $\{w_k,w_j\}$, $1\le k,\ j\le n+M$. Такая функция построена в работе [6]. Введем функцию

$$\varphi^*_{j_1j_2}(t_1,t_2)=\begin{cases}\psi(t_1,t_2)\mathrm{sgn}(\mathrm{t}_1-\mathrm{v}_{\mathrm{j}_1})\mathrm{sgn}(\mathrm{t}_2-\mathrm{v}_{\mathrm{j}_2})\\ (\mathrm{t}_1,\mathrm{t}_2)\in[\mathrm{d}_1\cap[0,1]]\times[[0,1]\cap\mathrm{d}_2],\\ 0\quad \mathrm{t}_1,\mathrm{t}_2.\end{cases}$$

Здесь $\psi(t_1,t_2)=(\max(\min\limits_{\mathrm{k}}|\mathrm{t_1}-\mathrm{w_k}|,\min\limits_{\mathrm{j}}|\mathrm{t_2}-\mathrm{w_j}|))^{\alpha}$,
$d_i=\{t_i:(t_i\le v_{j_i-s})\cup(t_i\ge v_{j_i+s})\}$; $i=1,2$; $s=[2^{1/\alpha}]+1$.

Справедлива оценка снизу

$$(S\varphi^*_{ij})(v_i,v_j)\ge\sum_{k=1}^{M-i-1}\sum_{l=1}^{M-j-1}\int\limits_{v_{i+k}}^{v_{i+k+1}}\int\limits_{v_{j+l}}^{v_{j+l+1}}\frac{\varphi^*_{ij}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2}{(\tau_1-v_i)(\tau_2-v_j)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{M-i-1}\sum_{l=1}^{j-1}\int\limits_{v_{i+k}}^{v_{i+k+1}}\int\limits_{v_{j-l-1}}^{v_{j-l}}\frac{\varphi^*_{ij}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2}{(\tau_1-v_i)(\tau_2-v_i)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{i-1}\sum_{l=1}^{M-j-1}\int\limits_{v_{i-k-1}}^{v_{i-k}}\int\limits_{v_{j+l}}^{v_{j+l+1}}\frac{\varphi^*_{ij}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2}{(\tau_1-v_i)(\tau_2-v_j)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{i-1}\sum_{l=1}^{j-1}\int\limits_{v_{i-k-1}}^{v_{i-k}}\int\limits_{v_{j-l-1}}^{v_{j-l}}\frac{\varphi^*_{ij}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2}{(\tau_1-v_i)(\tau_2-v_j)}=$$

$$=\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}K(M-i-1-k)K(M-j-1-l)\int\limits_{v_{i+k}}^{v_{i+k+1}}\int\limits_{v_{j+l}}^{v_{j+l+1}}\frac{\varphi^*_{ij}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2}{(\tau_1-v_i)(\tau_2-v_j)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}K(M-i-1-k)K(j-1-l)\int\limits_{v_{i+k}}^{v_{i+k+1}}\int\limits_{v_{j-l-1}}^{v_{j-l}}\frac{\varphi^*_{ij}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2}{(\tau_1-v_i)(\tau_2-v_j)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}K(i-1-k)K(M-j-1-l)\int\limits_{v_{i-k-1}}^{v_{i-k}}\int\limits_{v_{j+l}}^{v_{j+l+1}}\frac{\varphi^*_{ij}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2}{(\tau_1-v_i)(\tau_2-v_j)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}K(i-1-k)K(j-1-l)\int\limits_{v_{i-k-1}}^{v_{i-k}}\int\limits_{v_{j-l-1}}^{v_{j-l}}\frac{\varphi^*_{ij}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2}{(\tau_1-v_i)(\tau_2-v_j)}\ge$$

$$\ge\sum_{k=s}^{M}\sum_{l=s}^{M}K(M-i-1-k)K(M-j-1-l)\times$$

$$\times\frac{M}{k+1}\frac{M}{l+1}\int\limits_{v_{i+k}}^{v_{i+k+1}}\int\limits_{v_{j+l}}^{v_{j+l+1}}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+$$

$$+\sum_{k=s}^{M}\sum_{l=s}^{M}K(M-i-1-k)K(j-1-l)\times$$

$$\times\frac{M}{k+1}\frac{M}{l+1}\int\limits_{v_{i+k}}^{v_{i+k+1}}\int\limits_{v_{j-l-1}}^{v_{j-l}}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+$$

$$+\sum_{k=s}^{M}\sum_{l=s}^{M}K(i-1-k)K(M-j-1-l)\times$$

$$\times\frac{M}{k+1}\frac{M}{l+1}\int\limits_{v_{i-k-1}}^{v_{i-k}}\int\limits_{v_{j+l}}^{v_{j+l+1}}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+$$

$$+\sum_{k=s}^{M}\sum_{l=s}^{M}K(i-1-k)K(j-1-l)\times$$

$$\times\frac{M}{k+1}\frac{M}{l+1}\int\limits_{v_{i-k-1}}^{v_{i-k}}\int\limits_{v_{j-l-1}}^{v_{j-l}}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2.$$

Здесь $K(t)=1$ при $t\geq 0$ и $K(t)=0$ при $t<0$.

Осредняя последнее неравенство по значениям i и $j(1\leq i,j\leq M)$, имеем

$$\sup_{\varphi\in\Psi}\max_{t_1,t_2}S\varphi(t_1,t_2)\geq\frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}(S\varphi^*_{ij})(v_i,v_j)\geq$$

$$\geq\sum_{k=s}^{M}\sum_{l=s}^{M}\frac{1}{(k+1)(l+1)}\left[\int\limits_{v_{k+1}}^{1}\int\limits_{v_{l+1}}^{1}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+\right.$$

$$+\int\limits_{v_{k+1}}^{1}\int\limits_{0}^{v_{M-l-1}}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+\int\limits_{0}^{v_{M-k-1}}\int\limits_{v_{l+1}}^{1}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+$$

$$+\int\limits_0^{v_{M-k-1}}\int\limits_0^{v_{M-k-1}}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\Bigg]\geq$$

$$\geq\sum_{k=s}^{[M/\ln M]}\sum_{l=s}^{[M/\ln M]}\frac{4}{(k+1)(l+1)}\int\limits_0^1\int\limits_0^1\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2-$$

$$-\sum_{k=s}^{[M/\ln M]}\sum_{l=s}^{[M/\ln M]}\frac{1}{(k+1)(l+1)}\sum_{i=1}^{4}\int\int\limits_{D_i^{k,l}}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2=I_1-I_2,$$

где

$$D_1^{k,l}=D\backslash[0,v_{M-k-1};0,v_{M-l-1}],\ldots,\quad D_4^{k,l}=D\backslash[v_{k+1},1;v_{l+1},1].$$

Нетрудно видеть, что

$$I_1\geq(1+o(1))4\ln^2 M\int\limits_0^1\int\limits_0^1\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2.$$

Оценим интеграл $\int\int\limits_{D_1^{k,l}}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$. Остальные оцениваются аналогично. Так как в точках (v_{k_1},v_{k_2}) функция $\varphi^*(\tau_1,\tau_2)$ обращается в нуль, то

$$\int\int\limits_{D_1^{k,l}}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\leq O\left(\frac{kM}{M^{2+\alpha}}+\frac{lM}{M^{2+\alpha}}\right)=O\left(\frac{k}{M^{\alpha+1}}+\frac{l}{M^{\alpha+1}}\right),$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{M^{1+\alpha}}\sum_{k=1}^{[M/\ln M]}\sum_{l=1}^{[M/\ln M]}\frac{k+l}{(k+1)(l+1)}\leq\frac{2}{M^{1+\alpha}}\left[\frac{M}{\ln M}\right]\ln M\leq$$

$$\leq\frac{2}{M^\alpha}\leq\frac{2\ln^{\alpha/2}n}{n^\alpha}=o\left(\frac{\ln^2 n}{n^{\alpha/2}}\right).$$

Таким образом,

$$\sup_{\varphi\in\Psi}\max_{t_1,t_2}(S\varphi)(t_1,t_2)\geq(1+o(1))4\ln^2 N\int\limits_0^1\int\limits_0^1\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2.$$

Используя приведенные в §3 главы 1 оценки снизу интегралов $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$ на классах H_j^α, $j=1,3$, заканчиваем доказательство теоремы.

Доказательство теоремы 5.2 аналогично предыдущему. Отличие состоит в следующем. Обозначим через Ψ какой-нибудь из классов H_j^α, $j=1,2,3$. Обозначим через $\varphi^*(t_1,t_2)$ функцию, принадлежащую классу Ψ и обращающуюся в нуль в узлах к.ф. (5.2). Тогда функция $\varphi_{ij}^*(t_1,t_2)$ определяется формулой

$$\varphi_{ij}^*(t_1,t_2)=\begin{cases}\varphi^*(t_1,t_2)\mathrm{sgn}(\mathrm{t_1-v_i})\mathrm{sgn}(\mathrm{t_2-v_j})\\ [\mathrm{d_1}\cap[0,1]]\times[[0,1]\cap\mathrm{d_2}],\\ f_{ij}^*(t_1,t_2)\qquad \mathrm{t_1,t_2}.\end{cases}$$

Функция $f_{ij}^*(t_1,t_2)$ подбирается таким образом, чтобы $\varphi_{ij}^*(t_1,t_2)\in\Psi$. Нетрудно видеть, что это всегда осуществимо.

Доказательство теоремы 5.3 аналогично доказательству теоремы 5.1. Пусть $\Psi=W^{r,r}(1)$. Введем точки $v_k=k/M$, $M=[n/(\ln n)^{1/2r}]$. Через $\{w_i,w_j\}$ обозначим точки, объединяющие узлы $\{t_{k_i},t_{k_j}\}$ к.ф. (5.1) и точки $\{v_l,v_m\}$. Обозначим через $\varphi^*(t)$ неотрицательную функцию, принадлежащую классу $W^r(1)$ и обращающуюся в нуль в узлах $\{w_i\}=\{t_{k_i}\}_1^n\cup\{v_i\}_1^M$, $i=1,2$.

Введем функцию $\varphi^*(t_1,t_2)=\varphi^*(t_1)+\varphi^*(t_2)+\varphi^*(t_1)\varphi^*(t_2)$. Нетрудно видеть, что $\varphi^*(t_1,t_2)\in W^{r,r}(A)$, где $A=1+o(n^{-r+1})$. Введем функцию

$$\varphi_{ij}^*(t_1,t_2)=\varphi^*(t_1,t_2)\mathrm{sgn}(\mathrm{t_1-v_i})\mathrm{sgn}(\mathrm{t_2-v_j}).$$

Как и при доказательстве теоремы 5.1, можно показать, что

$$(S\varphi_{ij}^*)(v_i,v_j)\geq\sum_{k=1}^M\sum_{l=1}^M K(M-i-1-k)K(M-j-1-l)\times$$

$$\times\int\limits_{v_{i+k}}^{v_{+k+1}}\int\limits_{v_{j+l}}^{v_{j+l+1}}\frac{\varphi_{ij}^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-v_i)(\tau_2-v_j)}+$$

$$+\sum_{k=1}^M\sum_{l=1}^M K(M-i-1-k)K(j-1-l)\int\limits_{v_{i+k}}^{v_{i+k+1}}\int\limits_{v_{j-i-1}}^{v_{j-l}}\frac{\varphi_{ij}^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-v_i)(\tau_2-v_j)}+$$

$$+\sum_{k=l}^{M}\sum_{l=1}^{M}K(i-1-k)K(M-j-1-l)\int\limits_{v_{i-k-1}}^{v_{i-k}}\int\limits_{v_{j+l}}^{v_{j+l+1}}\frac{\varphi^*_{ij}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-v_i)(\tau_2-v_j)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}K(i-1-k)K(j-1-l)\int\limits_{v_{i-k-1}}^{v_{i-k}}\int\limits_{v_{i-j-l}}^{v_{j-l}}\frac{\varphi^*_{ij}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-v_i)(\tau_2-v_j)}\geq$$

$$\geq\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}K(M-i-1-k)K(j-1-l)\times$$

$$\times\left(\frac{M^2}{(k+1)(l+1)}\int\limits_{v_{i+k}}^{v_{i+k+1}}\int\limits_{v_{j+l}}^{v_{j+l+1}}\varphi^{*+}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+\right.$$

$$\left.+\frac{M^2}{kl}\int\limits_{v_{i+k}}^{v_{i+k+1}}\int\limits_{v_{j+l}}^{v_{j+l+1}}\varphi^{*-}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\right)+\cdots+$$

$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}K(i-1-k)K(j-1-l)\times$$

$$\times\left(\frac{M^2}{(k+1)(l+1)}\int\limits_{v_{i-k-1}}^{v_{i-k}}\int\limits_{v_{j-l-1}}^{v_{j-l-1}}\varphi^{*+}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+\right.$$

$$\left.+\frac{M^2}{kl}\int\limits_{v_{i-k-1}}^{v_{i-k}}\int\limits_{v_{j-l-1}}^{v_{j-l}}\varphi^{*-}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\right)\geq$$

$$\geq\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}K(M-i-1-k)K(M-j-1-l)\times$$

$$\times\left(\frac{M^2}{(k+1)(l+1)}\int\limits_{v_{i+k}}^{v_{i+k+1}}\int\limits_{v_{j+l}}^{v_{j+l+1}}\varphi^{*}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2-\right.$$

$$\left.-\frac{M^2(k+l+1)}{k(k+1)(l+1)l}\int\limits_{v_{i+k}}^{v_{i+k+1}}\int\limits_{v_{j+l}}^{v_{j+l+1}}|\varphi^{*}(\tau_1,\tau_2)|d\tau_1 d\tau_2\right)+\cdots+$$

$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}K(i-1-k)K(j-1-l)\times$$

$$\times\left(\frac{M^2}{(k+1)(l+1)}\int\limits_{v_{i-k-1}}^{v_{i-k}}\int\limits_{v_{j-l-1}}^{v_{j-l}}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2-\right.$$

$$\left.-\frac{M^2(k+l+1)}{k(k+1)(l+1)l}\int\limits_{v_{i+k}}^{v_{i+k+1}}\int\limits_{v_{j+l}}^{v_{j+l+1}}|\varphi^*(\tau_1,\tau_2)|d\tau_1 d\tau_2\right)\geq$$

$$\geq\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}K(M-i-1-k)K(M-j-1-l)\times$$

$$\times\frac{M^2}{(k+1)(l+1)}\int\limits_{v_{i+k}}^{v_{i+k+1}}\int\limits_{v_{j+l}}^{v_{j+l+1}}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+$$

$$+\cdots+\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}K(i-1-k)K(j-1-l)\times$$

$$\times\frac{M^2}{(k+1)(l+1)}\int\limits_{v_{i-k-1}}^{v_{i-k}}\int\limits_{v_{j-l-1}}^{v_{j-l}}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+o(n^{-r}\ln^2 n).$$

Здесь

$$\varphi^{*+}=\begin{cases}\varphi^*,\ \varphi^*\geq 0,\\ 0,\ \varphi^*<0,\end{cases}$$

$$\varphi^{*-}=\begin{cases}0,\ \varphi^*\geq 0,\\ \varphi^*,\ \varphi^*<0.\end{cases}$$

Осредняя полученное неравенство, имеем

$$\sup_{\varphi\in\Psi}\max_{t_1,t_2}(S\varphi)(t_1,t_2)\geq\frac{1}{M^2}\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}(S\varphi^*_{ij})(v_i,v_j)\geq$$

$$\geq\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\frac{1}{(k+1)(l+1)}\int\limits_{v_{k+l}}^{1}\int\limits_{v_{l+1}}^{1}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+\cdots+$$

$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\frac{1}{(k+1)(l+1)}\int\limits_{0}^{v_{M-k-1}}\int\limits_{0}^{v_{M-l-1}}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+o(n^{-r}\ln^2 n)\geq$$

$$\geq 4\sum_{k=1}^{[M/\ln M]}\sum_{l=1}^{[M/\ln M]}\frac{1}{(k+1)(l+1)}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2-$$

$$-3\sum_{k=1}^{[M/\ln M]}\sum_{l=1}^{[M/\ln M]}\frac{1}{(k+1)(l+1)}\left[\int\limits_{0}^{v_k}\int\limits_{0}^{v_l}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+\right.$$

$$+\int\limits_{0}^{v_k}\int\limits_{v_{M-l}}^{1}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+\int\limits_{v_{M-k}}^{1}\int\limits_{0}^{v_l}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+$$

$$\left.+\int\limits_{v_{M-k}}^{1}\int\limits_{v_{M-l}}^{1}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\right]-$$

$$-2\sum_{k=1}^{[M/\ln M]}\sum_{l=1}^{[M/\ln M]}\frac{1}{(k+1)(l+1)}\left[\int\limits_{0}^{v_k}\int\limits_{v_l}^{v_{M-l}}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+\right.$$

$$+\int\limits_{v_{M-k}}^{1}\int\limits_{v_l}^{v_{M-l}}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+\int\limits_{v_k}^{v_{M-k}}\int\limits_{0}^{v_l}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+$$

$$\left.+\int\limits_{v_k}^{v_{M-k}}\int\limits_{v_{M-l}}^{1}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\right]+o(n^{-r}\ln n). \qquad (5.5)$$

Очевидно

$$\sum_{k=1}^{[M/\ln M]}\sum_{l=1}^{[M/\ln M]}\frac{1}{(k+1)(l+1)}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\geq$$

$$\geq(1+o(1))\ln^2 n\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2;$$

$$\int\limits_0^{v_k}\int\limits_0^{v_l}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \le kl\int\limits_0^{v_1}\int\limits_0^{v_1}\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \le \frac{Akl}{M^{r+2}}.$$

Поэтому, продолжая выкладки, начатые в неравенстве (5.5), имеем

$$\sup_{\varphi\in\Psi}\max_{t_1,t_2}(S\varphi)(t_1,t_2) \ge$$

$$\ge (1+o(1))\ln^2 n\int\limits_0^1\int\limits_0^1\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 -$$

$$-A\sum_{k=1}^{[M/\ln M]}\sum_{l=1}^{[M/\ln M]}\frac{kl}{(k+1)(l+1)}\frac{1}{M^{r+2}} =$$

$$= (1+o(1))\ln^2 n\int\limits_0^1\int\limits_0^1\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2.$$

Оценив интеграл $\int\limits_0^1\int\limits_0^1\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$, завершаем доказательство теоремы.

Доказательства теорем 5.4 – 5.6 аналогичны доказательствам теорем 2.3 – 2.5, приведенным в главе 3 при исследовании к.ф. на замкнутых контурах интегрирования.

6. Многомерные интегралы

Рассмотрим интеграл

$$T\varphi = \int\limits_D\int\frac{f(\theta)\varphi(y)}{r^2(x,y)}dy,$$

где $x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2),\ r=|x-y|,\ \theta=(x-y)/r,\ D=[0,1]^2$.

Интеграл $T\varphi$ будем вычислять по кубатурным формулам

$$T\varphi = \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}p_{k_1k_2}(x_1,x_2)\varphi(t_{k_1},t_{k_2}) + R_N(x,t_k,t_l,p_{kl},\varphi), \tag{6.1}$$

$$T\varphi = \sum_{k=1}^{N}p_k(x_1,x_2)\varphi(M_k) + R_N(x,M_k,p_k,\varphi). \tag{6.2}$$

Формулировки теорем

Теорема 6.1 [31], [36]. Пусть $N = n^2,\ \Psi = H_j^\alpha,\ j = 1,3$ и интеграл $T\varphi$ вычисляется по к.ф. вида (6.1) при $\rho = 0$. Тогда справедливы оценки

$$\zeta_N[H_1^\alpha] \geq \frac{(2+o(1))\ln N}{2^\alpha(1+\alpha)N^{\alpha/2}} \int\limits_0^{2\pi} |f(\cos\varphi, \sin\varphi)| d\varphi,$$

$$\zeta_N[H_3^\alpha] \geq (1+o(1))4N\ln N \int\limits_0^{2\pi} |f(\cos\varphi, \sin\varphi)| d\varphi \int\limits_0^{1/2n} \int\limits_0^{1/2n} (t^2+\tau^2)^{\alpha/2} dt d\tau.$$

Теорема 6.2 [31], [36]. Пусть $\Psi = H_j^\alpha,\ j = 1,2,3$ и интеграл $T\varphi$ вычисляется по к.ф. вида (6.2). Тогда справедлива оценка

$$\zeta_N[H_1^\alpha] \geq \frac{1}{2}(1+o(1))D_j N^{-\alpha/2}\ln N \int\limits_0^{2\pi} |f(\cos\varphi, \sin\varphi)| d\varphi,$$

где $D_1 = \frac{2^{1-\alpha}}{(2+\alpha)}$, $D_2 = \frac{2^{1-\alpha/2}}{(2+\alpha)}$, $D_3 = \frac{12}{2+\alpha}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}}\right)^{(1+\alpha)/2} \int\limits_0^{\pi/6} \frac{d\varphi}{\cos^{2+\alpha}\varphi}$.

Теорема 6.3 [31], [36]. Пусть $N = n^2,\ \Psi = W^{r,r}(1)$ и интеграл $T\varphi$ вычисляется по к.ф. вида (6.1) при $\rho_i = r-1,\ i = 1,2$. Тогда справедлива оценка

$$\zeta_N[\Psi] \geq \frac{(1+o(1))\ln N}{2^{2r-1}N^{r/2}r!} \int\limits_0^{2\pi} |f(\cos\varphi, \sin\varphi)| d\varphi.$$

Теорема 6.4 [31], [36]. Пусть $N = n^2, \Psi = H_j^\alpha,\ j = 1,3$. Среди к.ф. вида (6.1) при $\rho = 0$ асимптотически оптимальной при $1/n \leq t_i \leq$ $\leq 1 - 1/n,\ i = 1,2$, является формула

$$T\varphi = \sum_{k_1=1}^{n-1}\sum_{k_2=1}^{n-1} \varphi(t'_{k_1}, t'_{k_2}) \int\limits_{d_{k_1k_2}} \int \frac{f(\theta)}{r^2(x,y)} dy +$$

$$+\varphi(t'_{i_1}, t'_{i_2}) \int\limits_{\bar{\Delta}_{i_1i_2}} \int \frac{f(\theta)}{r^2(x,y)} dy + R_N(\varphi), \tag{6.3}$$

где $t_k = k/n$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $t'_k = (2k+1)/2n$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $\Delta_{k_1k_2} = [t_{k_1, t_{k_1+1}; t_{k_2}, t_{k_2+1}}]$, $k_1, k_2 = 0, 1, \ldots, n-1$, $\bar{\Delta}_{k_1k_2} = [t_{k_1-1}, t_{k_1+2}; t_{k_2-1}, t_{k_2+2}]$, $x \in \Delta_{i_1i_2}, d_{k_1k_2} = D \bigcap G(\bar{\Delta}_{i_1,i_2})$, $G(\bar{\Delta}_{i_1i_2})-$ дополнение квадрата $\bar{\Delta}_{i_1i_2}$ до квадрата $D = [0,1]^2$.

Погрешность формулы (6.3) равна

$$R_N[H_1^\alpha(1)] = \frac{(1+o(1))2^{1-\alpha}\ln n}{(1+\alpha)N^{\alpha/2}} \int\limits_0^{2\pi} |f(\cos\varphi, \sin\varphi)| d\varphi,$$

$$R_N[H_3^\alpha(1)] = (1+o(1))4N\ln N \int\limits_0^{2\pi} |f(\cos\varphi, \sin\varphi)| d\varphi \int\limits_0^{1/2n} \int\limits_0^{1/2n} (t^2+\tau^2)^{\alpha/2} dt d\tau.$$

Рассмотрим кубатурную формулу

$$T\varphi = \sum_{k=1}^{N} \varphi(B_k) \int\limits_{\Delta_j(K)\cap D\cap G(B_j)} \frac{f(\theta)}{r^2(x,y)} dy + \varphi(B_j) \int\limits_{\Delta(B_j)} \frac{f(\theta)}{r^2(x,y)} dy +$$
$$+ R_N(\varphi), \tag{6.4}$$

где $\Delta(B_j)-$ круг в метрике ρ_j радиуса $1/n$ с центром в точке x; $G(B_j)-$ дополнение $\Delta(B_j)$ до D. Описания решеток узлов приведены в предыдущем параграфе.

Теорема 6.5 [36]. Пусть $N = n^2$, $\Psi_j = H_j^\alpha$, $j = 1, 2, 3$. Среди всевозможных кубатурных формул вида (6.2) асимптотически оптимальной является формула (6.4). Ее погрешность равна

$$R_N[\Psi_j] = (1+o(1))D_j N^{-\alpha/2} \ln N \int\limits_0^{2\pi} |f(\cos\varphi, \sin\varphi)| d\varphi.$$

Рассмотрим кубатурную формулу

$$T\varphi = \int\limits_D \int \frac{\varphi_{nn}(y) f(\theta)}{r^2(x,y)} dy + R_{nn}(\varphi), \left(\frac{2}{n} < x_i < 1 - \frac{2}{n}, i = 1, 2\right), \tag{6.5}$$

где $\varphi_{nn}(y)-$ сплайн, описанный в теореме 2.9.

Теорема 6.6 [36]. Пусть $N = n^2$, $\Psi = W^{r,r}(1)$. Среди к.ф. вида (6.1) при $\rho_i = \rho_2 = r-1$, формула (6.5) является асимптотически оптимальной.

Теорема 6.7 [36]. Пусть $N = n^2$, $\Psi = W^{r,r}(1)$. Среди к.ф. вида (6.1) при $\rho_i = 0$, $i = 1, 2$, асимптотически оптимальной является формула

$$T\varphi = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1}{}' l_{L,L}\varphi(\Delta_{kl}) r^{-2}(\upsilon_k, \upsilon_l) + \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1}{}' \psi(\prod_{n,n}(T_{r-1}\varphi(\upsilon_k, \upsilon_l)), \Delta_{kl}) +$$

$$+\psi\left(\prod_{n,n}(T_{r-1}\varphi(\upsilon_k, \upsilon_l)), [\upsilon_{i-1}, \upsilon_{i+2}; \upsilon_{j-1}, \upsilon_{j+2}]\right) + R_N(\varphi),$$

где $\upsilon_k = k/M, k = 0, 1, \ldots, M, M = [n/L], L = [\ln^{1/r} n]$,
$\Delta_{kl} = [\upsilon_k, \upsilon_{k+1}; \upsilon_l, \upsilon_{l+1}], \psi(\varphi, \Delta_{kl}) = \int\limits_{\Delta_{kl}}\int \frac{f(\Theta)\varphi(y)}{r^2(x,y)} dy,\ (s_1, s_2) \in \Delta_{i,j}, \sum\sum{}'$ означает суммирование по квадратам Δ_{kl}, не имеющим пересечения с квадратом $[\upsilon_{i-1}, \upsilon_{i+2}; \upsilon_{j-1}, \upsilon_{j+2}]$. Погрешность этой формулы равна

$$R_N[\Psi] = (1 + o(1))2 \ln n \int\limits_0^{2\pi} |f(\cos s, \sin s)| ds \inf_c \|B_r^*(\cdot) - c\|_{L_1[0,1]} n^{-r}.$$

Доказательства теорем

Доказательства теорем 6.1 − 6.7 проводятся по той же схеме, что и доказательства теорем 5.1-5.9. Поэтому приведем только доказательство теоремы 6.1.

Доказательство теоремы 6.1. Пусть $\Psi = H_1^\alpha$. Введем точки $v_k = k/M$, $M = [n/\sqrt{\ln n}]$ и обозначим через $\{w_k, w_j\}$ множество точек, объединяющее узлы $\{t_{k_1}, t_{k_2}\}$ и точки $\{v_{j_1}, v_{j_2}\}$ $k_i = 1, 2, \ldots, n$, $j_i = 1, 2, \ldots, M$, $i = 1, 2$. Обозначим через $\varphi^*(t_1, t_2)$ неотрицательную функцию, входящую в класс H_1^α и обращающуюся в нуль в точках $\{w_k, w_j\}$, $1 \le k$, $j \le n + M$. Введем функцию

$$\varphi^*_{j_1 j_2}(t) = \begin{cases} \varphi^*(t_1, t_2)\mathrm{sgn\,f}\left(\frac{\mathrm{t_1 - v_{j_1}}}{\mathrm{r(t, v_f)}}, \frac{\mathrm{t_2 - v_{j_2}}}{\mathrm{r(t, v_j)}}\right) & \rho(\mathrm{t, g(t)}) \ge 2([2^{1/\alpha}] + 1)\frac{1}{\mathrm{M}}, \\ \gamma(t_1, t_2) & (\mathrm{t_1, t_2}). \end{cases}$$

Здесь

$$g(t) = \left\{ t : f\left(\frac{t_1}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}}, \frac{t_2}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}}\right) = 0 \right\},\ t = (t_1, t_2),\ v_j = (v_{j_1}, v_{f_2})$$

функция $\gamma(t_1, t_2)$ такая, что $\varphi^*_{j_1 i_2} \in \Psi$.

Справедлива оценка снизу

$$(K\varphi_{ij})(v_i, v_j) \ge \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} K(M - i - 1 - k)K(M - j - 1 - l)\times$$

$$\times \int\limits_{v_{i+k}}^{v_{k+1+i}} \int\limits_{v_{j+l}}^{v_{j+l+1}} \frac{f(\Theta)\varphi^*_{ij}(\tau)d\tau}{\sqrt{(\tau_1 - v_i)^2 + (\tau_2 - v_j)^2}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} K(M - i - 1 - k)K(j - 1 - l) \int\limits_{v_{i+k}}^{v_{i+k+1}} \int\limits_{v_{j-l-1}}^{v_{j-l}} \frac{f(\Theta)\varphi^*_{ij}(\tau)d\tau}{\sqrt{(\tau_1 - v_i)^2 + (\tau_2 - v_j)^2}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} K(i - 1 - k)K(M - j - 1 - l) \int\limits_{v_{i-k-1}}^{v_{i-k}} \int\limits_{v_{j+l}}^{v_{j+l+1}} \frac{f(\Theta)\varphi^*_{ij}(\tau)d\tau}{\sqrt{(\tau_1 - v_i)^2 + (\tau_2 - v_j)^2}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} K(i - 1 - k)K(j - 1 - l) \int\limits_{v_{i-k-1}}^{v_{i-k}} \int\limits_{v_{i-j-l}}^{v_{j-l}} \frac{f(\Theta)\varphi^*_{ij}(\tau)d\tau}{\sqrt{(\tau_1 - v_i)^2 + (\tau_2 - v_j)^2}} \ge$$

$$\geq \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} K(M-i-1-k)K(M-j-1-l)\times$$

$$\times \frac{M^2\left|f\left(\frac{k'}{\sqrt{k'^2+l'^2}},\frac{l'}{\sqrt{k'^2+l'^2}}\right)\right|}{k^2+l^2}\int\limits_{v_{i+k}}^{v_{i+k+1}}\int\limits_{v_{j+l}}^{v_{j+l+1}}|\varphi^*_{ij}(\tau)|d\tau+$$

$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} K(M-i-1-k)K(j-1-l)\times$$

$$\times \frac{M^2\left|f\left(\frac{k'}{\sqrt{k'^2+l'^2}},\frac{-l'}{\sqrt{k'^2+l'^2}}\right)\right|}{k^2+l^2}\int\limits_{v_{i+k}}^{v_{i+k+1}}\int\limits_{v_{j-l-1}}^{v_{j-l}}|\varphi^*_{ij}(\tau)|d\tau+$$

$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} K(i-1-k)K(M-j-1-l)\times$$

$$\times \frac{M^2\left|f\left(\frac{-k'}{\sqrt{k'^2+l'^2}},\frac{l'}{\sqrt{k'^2+l'^2}}\right)\right|}{k^2+l^2}\int\limits_{v_{i-k-1}}^{v_{i+k}}\int\limits_{v_{j+l+1}}^{v_{j+i}}|\varphi^*_{ij}(\tau)|d\tau+$$

$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} K(i-k-1)K(j-1-l)\times$$

$$\times \frac{M^2\left|f\left(\frac{-k'}{\sqrt{k'^2+l'^2}},\frac{-l'}{\sqrt{k'^2+l'^2}}\right)\right|}{k^2+l^2}\int\limits_{v_{i-k-1}}^{v_{i-k}}\int\limits_{v_{j-l-1}}^{v_{j-l}}|\varphi^*_{ij}(\tau)|d\tau \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} K(M-i-k-1)K(M-j-1-l)\times$$

$$\times \frac{M^2\left|f\left(\frac{k}{\sqrt{k^2+l^2}},\frac{l}{\sqrt{k^2+l^2}}\right)\right|}{k^2+l^2}\int\limits_{v_{i+k}}^{v_{i+k+1}}\int\limits_{v_{j+l}}^{v_{j+l+1}}|\varphi^*(\tau)|d\tau+$$

$$+\cdots+$$

$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} K(i-1-k)K(j-1-l)\times$$

$$\times \frac{M^2 \left| f\left(\frac{-k}{\sqrt{k^2+l^2}}, \frac{-l}{\sqrt{k^2+l^2}}\right)\right|}{k^2+l^2} \int\limits_{v_{i-k-1}}^{v_{i-k}} \int\limits_{v_{j-l-1}}^{v_{j-l}} |\varphi^*(\tau)| d\tau +$$

$$+ o(n^{-\alpha} \ln n).$$

Здесь

$$\left| f\left(\frac{k'}{\sqrt{k'^2+l'^2}}, \frac{l'}{\sqrt{k'^2+l'^2}}\right)\right| =$$

$$= \min_{(t_1,t_2)\in[v_k,v_{k+1};v_l,v_{l+1}]} \left| f\left(\frac{t_1}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}}, \frac{t_2}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}}\right)\right|.$$

Осредняя предыдущее неравенство по значениям i, j, имеем

$$\sup_{\varphi\in\Psi} \max_t (K\varphi)(t) \geq$$

$$\geq \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \varphi^*(\tau) d\tau \sum_{k=1}^{[M/\ln M]} \sum_{l=1}^{[M/\ln M]} \frac{1}{k^2+l^2} \left[\left| f\left(\frac{k}{\sqrt{k^2+l^2}}, \frac{l}{\sqrt{k^2+l^2}}\right)\right| + \right.$$

$$+ \left| f\left(\frac{-k}{\sqrt{k^2+l^2}}, \frac{l}{\sqrt{k^2+l^2}}\right)\right| + \left| f\left(\frac{k}{\sqrt{k^2+l^2}}, \frac{-l}{\sqrt{k^2+l^2}}\right)\right| +$$

$$\left. + \left| f\left(\frac{-k}{\sqrt{k^2+l^2}}, \frac{-l}{\sqrt{k^2+l^2}}\right)\right| \right] \geq$$

$$\geq (1+o(1)) \ln n \int\limits_0^{2\pi} |f(\cos\varphi, \sin\varphi)| \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \varphi^*(\tau_1, \tau_2) \mathrm{d}\tau_1 \mathrm{d}\tau_2.$$

В самом деле, пусть $L = [M/\ln M]$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{[M/\ln M]} \sum_{l=1}^{[M/\ln M]} \frac{1}{k^2+l^2} \left[\left| f\left(\frac{k}{\sqrt{k^2+l^2}}, \frac{l}{\sqrt{k^2+l^2}}\right)\right| + \right.$$

$$+ \left| f\left(\frac{-k}{\sqrt{k^2+l^2}}, \frac{l}{\sqrt{k^2+l^2}}\right)\right| + \left| f\left(\frac{k}{\sqrt{k^2+l^2}}, \frac{-l}{\sqrt{k^2+l^2}}\right)\right| +$$

$$\left. + \left| f\left(\frac{-k}{\sqrt{k^2+l^2}}, \frac{-l}{\sqrt{k^2+l^2}}\right)\right| \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{L}\sum_{l=1}^{L}\frac{1}{L^2}\frac{1}{\left(\frac{k}{L}\right)^2+\left(\frac{l}{L}\right)^2}\left[\left|f\left(\frac{\frac{k}{L}}{\left(\left(\frac{k}{L}\right)^2+\left(\frac{l}{L}\right)^2\right)^{1/2}},\frac{\frac{l}{L}}{\left(\left(\frac{k}{L}\right)^2+\left(\frac{l}{L}\right)^2\right)^{1/2}}\right)\right|+\right.$$

$$+\left|f\left(-\frac{-\frac{k}{L}}{\left(\left(\frac{k}{L}\right)^2+\left(\frac{l}{L}\right)^2\right)^{1/2}},\frac{\frac{l}{L}}{\left(\left(\frac{k}{L}\right)^2+\left(\frac{l}{L}\right)^2\right)^{1/2}}\right)\right|+$$

$$+\left|f\left(\frac{\frac{k}{L}}{\left(\left(\frac{k}{L}\right)^2+\left(\frac{l}{L}\right)^2\right)^{1/2}},\frac{-\frac{l}{L}}{\left(\left(\frac{k}{L}\right)^2+\left(\frac{l}{L}\right)^2\right)^{1/2}}\right)\right|+$$

$$\left.+\left|f\left(\frac{-\frac{k}{L}}{\left(\left(\frac{k}{L}\right)^2+\left(\frac{l}{L}\right)^2\right)^{1/2}},\frac{-\frac{l}{L}}{\left(\left(\frac{k}{L}\right)^2+\left(\frac{l}{L}\right)^2\right)^{1/2}}\right)\right|\right]\geq$$

$$\geq\int\limits_{\frac{2}{L}}^{1}\int\limits_{\frac{2}{L}}^{1}\frac{1}{x^2+y^2}\left[\left|f\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}},\frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right)\right|+\right.$$

$$+\left|f\left(\frac{-x}{(x^2+y^2)^{1/2}},\frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right)\right|+\left|f\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}},\frac{-y}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right)\right|+$$

$$\left.+\left|f\left(\frac{-x}{(x^2+y^2)^{1/2}},\frac{-y}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right)\right|\right]\geq$$

$$\geq\int\limits_{\frac{2}{L}}^{1}\int\limits_{\frac{2}{L}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{2}{L}}\left[\frac{1}{\rho}\left|f(\cos\varphi,\sin\varphi)\right|+\left|f(\cos(\frac{\pi}{2}+\varphi),\sin(\frac{\pi}{2}+\varphi))\right|+\right.$$

$$\left.+\left|f(\cos(\varphi+\pi),\sin(\varphi+\pi)\right|+\left|f(\cos(\varphi+\frac{3\pi}{2}),\sin(\varphi+\frac{3\pi}{2}))\right|\right]d\varphi d\rho=$$

$$=(1+o(1))\ln\rho|_{\frac{2}{L}}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi}|f(\cos\varphi,\sin\varphi)|\mathrm{d}\varphi=(1+\mathrm{o}(1))\ln\mathrm{n}\int\limits_{0}^{2\pi}|\mathrm{f}(\cos\varphi,\sin\varphi)|\mathrm{d}\varphi.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Утверждения, аналогичные теоремам 6.1 – 6.7, справедливы и для интегралов вида

$$\int\limits_D \int f(x,\theta)\varphi(y)r^{-2}(y)dy.$$

Замечание 2. Аналогичные утверждения справедливы и в случае, когда $D-$ сфера.

7. Оптимальные методы восстановления многомерных сопряженных функций

В предыдущих параграфах были построены асимптотически оптимальные и оптимальные по порядку кубатурные формулы вычисления полисингулярных интегралов вида

$$J\varphi \equiv \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}d\tau_1 d\tau_2 \quad ((t_1,t_2)\in D) \tag{7.1}$$

при $-1+2/n \le t_1,\, t_2 \le 1-2/n$, где n^2- число узлов кубатурной формулы, предназначенной для вычисления интеграла (7.1), $D=(-1,1)^2$.

Как следует из определения оптимальных кубатурных формул вычисления бисингулярных интегралов, при их построении ставится задача вычисления бисингулярных интегралов с наибольшей точностью на данном классе функций в любой точке области $D=(-1,1)^2$. Так как интеграл $J\varphi(t)$ является функцией переменных $t=(t_1,t_2)$ в области D, то задача вычисления интегралов вида (7.1) может быть поставлена иначе.

Пусть $N-$ целое число, $\Psi-$ класс функций, определенных в области $\bar{D}$. Через $\tilde{\Psi}$ обозначим класс функций, в который оператор J отображает функции $\varphi\in\Psi$. На классе функций Ψ определены N функционалов. Требуется, используя N функционалов функци $\varphi\in\Psi$, построить оптимальный по точности метод восстановления функций из класса $\tilde{\Psi}$.

Такая постановка задачи требует вычисления поперечников на классе $\tilde{\Psi}$.

7.1. Гладкость полисингулярных интегралов

В этом разделе исследуется гладкость функций $\tilde{\Psi}=J\varphi$, где φ принадлежит некоторому классу Ψ. Изложение ведется для бисингулярных

интегралов, но нетрудно видеть, что все результаты легко распространяются на полисингулярные интегралы.

Теорема 7.1 [38]. Пусть в области $\bar{D} = [-1,1]^2$ функция $f(t_1,t_2) \in \in C_2^s(1)$ и обращается в нуль вместе с производными до r порядка на границе Γ области $\bar{D}$. Пусть выполнены условия

$$\Big\| \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \frac{f^{(i,j)}(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} d\tau_1 d\tau_2 \Big\|_{C(D)} \leq M$$

при $i + j = r,\ 0 \leq i, j \leq r$.

Тогда функции $\Gamma = Jf$ принадлежат классу функций $Q_{r\gamma}(\bar{D}, M_1)$, $\gamma = s - r$.

Теорема 7.2 [38]. Пусть в области $\bar{D} = [-1,1]^2$ функция $f(t_1,t_2) \in \in C_2^s(1)$ и обращается в нуль вместе с производными до r порядка на границе Γ области $\bar{D}$. Пусть, кроме того, производные s-го порядка функции $f(t_1,t_2)$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\alpha,\ 0 < \alpha < 1$.

Тогда функция $\Gamma = Jf$ принадлежат классу функций $Q^*_{r\gamma}(\bar{D}, M_1)$, $\gamma = s - r$.

Доказательства теорем

Доказательство теоремы 7.1. Покажем, что функция

$$F(t_1,t_2) = \int\limits_{\bar{D}} \int \frac{f(\tau_1,\tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)}$$

принадлежит классу функций $Q_{r\gamma}(\bar{D}, M_1)$.

Пусть точка (t_1,t_2) лежит внутри области $\bar{D}$. Тогда

$$\frac{\partial F(t_1,t_2)}{dt_1} = \int\limits_{\bar{D}} \int \frac{f(\tau_1,\tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^2(\tau_2 - t_2)} =$$

$$= \frac{1}{(1-t_1)} \int\limits_{-1}^{1} \frac{f(1,\tau_2)}{\tau_2 - t_2} d\tau + \frac{1}{(1+t_2)} \int\limits_{-1}^{1} \frac{f(-1,\tau_2)}{\tau_2 - t_2} d\tau_2 +$$

$$+ \int\limits_{\bar{D}} \int \frac{f^{(1,0)}(\tau_1,\tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} = \int\limits_{\bar{D}} \int \frac{f^{(1,0)}(\tau_1,\tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)}.$$

Здесь интеграл справа в первой строке понимается как интеграл Адамара (определение см. в [2]).

Продолжая этот процесс, имеем при $i+j \le r$:

$$F^{(i,j)}(t_1,t_2) = \int\limits_D\int \frac{f^{(i,j)}(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}d\tau_1 d\tau_2. \tag{7.2}$$

Последующие производные имеют вид

$$F^{(r+1,0)}(t_1,t_2) = \frac{1}{1-t_1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{f^{(r+1,0)}(1,\tau_2)}{\tau_2-t_2}d\tau_2 + \frac{1}{(1+t_2)}\int\limits_{-1}^{1}\frac{f^{(r+1,0)}(-1,\tau_2)}{\tau_2-t_2}d\tau_2 +$$

$$+\int\limits_{\bar D}\int \frac{f^{(r+1,0)}(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}d\tau_1 d\tau_2;$$

$$F^{(r+1,1)}(t_1,t_2) = \frac{f^{(r+1,0)}(1,1)}{(1-t_1)(1-t_2)} + \frac{f^{(r+1,0)}(1,-1)}{(1-t_1)(1+t_1)} +$$

$$+\frac{1}{(1+t_1)(1-t_2)}f^{(r+1,0)}(-1,1) + \frac{1}{(1+t_1)(1+t_2)}f^{(r+1,0)}(-1,-1) +$$

$$+\frac{1}{1-t_1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{f^{(r+1,1)}(1,\tau_2)}{\tau_2-t_2}d\tau_2 + \frac{1}{1+t_1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{f^{(r+1,1)}(-1,\tau_2)}{\tau_2-t_2}d\tau_2 +$$

$$+\frac{1}{1-t_2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{f^{(r+1,1)}(\tau_1,1)}{\tau_1-t_1}d\tau_1 + \frac{1}{1+t_2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{f^{(r+1,1)}(\tau_1,-1)}{\tau_1-t_1}d\tau_1 +$$

$$+\int\limits_{\bar D}\int \frac{f^{(r+1,1)}(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}d\tau_1 d\tau_2. \tag{7.3}$$

Продолжая этот процесс и вычисляя производные до s-го порядка, убеждаемся, что справедливо неравенство

$$\left|\frac{\partial^{|v|}F(t_1,t_2)}{\partial t_1^{v_1}\partial t_2^{v_2}}\right| \le \frac{M}{\rho(t,\Gamma)^{|v|-r}},\ r < v \le s$$

при $t=(t_1,t_2)\in \bar D\setminus\Gamma$, где $\Gamma-$ граница области $\bar D$, $v=(v_1,v_2)$, $|v| = v_1+v_2,\ v_i\ge 0,\ i=1,2$.

Исследуем теперь гладкость функции $F(t_1, t_2)$ на границе Γ. Из формулы (7.2) следует, что функции $F^{(i,j)}(t_1, t_2)$ определены во всей области $\bar{D}$ и непрерывны при $(t_1, t_2) \in D$ и $i + j \leq r$. Следовательно, функции $F^{(i,j)}(t_1, t_2),\ i + j \leq r$, определены во всей области $\bar{D}$ и ограничены некоторой константой M_1.

Таким образом, функция $F(t_1, t_2) \in Q_{r\gamma}(\bar{D}, M_1)$, где $\gamma = s - r$.

Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве теоремы вместо интеграла Адамара можно воспользоваться формулами Сохоцкого – Племеля для бисингулярных интегралов.

Доказательство теоремы 7.2. Доказательство теоремы проводится по аналогии с доказательством предыдущей теоремы. Отличие заключается в оценке сингулярных и бисингулярных интегралов от функций $f^{(i,j)}(t_1, t_2),\ i + j = r$.

Представим производную $F^{(i,j)}(t_1, t_2)$ $(i + j = s)$ по формуле, аналогичной формуле (7.3). Тогда при оценке производной $F^{(s,0)}(t_1, t_2)$ возникает необходимость в оценке интеграла

$$\left| \frac{1}{(1-t_1)^{s-r}} \int\limits_{-1}^{1} \frac{f^{(s,0)}(1, \tau_2)}{\tau_2 - t_2} d\tau_2 \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{1}{(1-t_1)^{s-r}} \int\limits_{-1}^{1} \frac{f^{(s,0)}(1, \tau_2) - f^{(s,0)}(1, t_2)}{\tau_2 - t_2} d\tau_2 \right| +$$

$$+ \left| \frac{1}{(1-t_1)^{s-r}} f^{(s,0)}(1, t_2) \ln \left| \frac{1-t_2}{1+t_2} \right| \right| \leq \frac{A|\ln \rho(t, \Gamma)|}{\rho^{\gamma}(t, \Gamma)}.$$

Таким образом, доказано, что функции $F(t_1, t_2)$ принадлежат классу $Q^*_{r\gamma}(\Omega, M)$.

7.2. Оптимальные кубатурные формулы вычисления полисингулярных интегралов

Построим оптимальную по порядку кубатурную формулу вычисления бисингулярных интегралов с ядром Коши, равномерно сходящуюся в области $D = (-1, 1)^2$. Нетрудно видеть, что все полученные ниже результаты справедливы для полисингулярных интегралов.

Рассмотрим интеграл

$$J\varphi = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)} d\tau_1 d\tau_2, \quad -1 < t_1, t_2 < 1. \tag{7.4}$$

Введем функции:
$f(t_1,t_2) = \frac{1}{4}[\varphi(-1,-1)(t_1-1)(t_2-1) - \varphi(-1,1)(t_1-1)(t_2+1) -$
$- \varphi(1,-1)(t_1+1)(t_2-1) + \varphi(1,1)(t_1+1)(t_2+1)], \varphi_1(\tau_1,\tau_2) = \varphi(\tau_1,\tau_2) -$
$-f(\tau_1,\tau_2)$ и представим интеграл $J\varphi$ в виде

$$J\varphi = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi_1(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)} d\tau_1 d\tau_2 + \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)} d\tau_1 d\tau_2. \tag{7.5}$$

Второй интеграл в правой части последнего равенства вычисляется точно. Преобразуем первый интеграл в правой части (7.5). Введем функцию $\varphi^*(\tau_1,\tau_2) = \varphi_1(\tau_1,\tau_2) - \varphi_2(\tau_1,\tau_2)$, где $\varphi_2(\tau_1,\tau_2) = \frac{1}{2}[-\varphi_1(\tau_1,-1) \times$
$\times (\tau_2-1) + \varphi_1(\tau_1,1)(\tau_2+1) - \varphi_1(-1,\tau_2)(\tau_1-1) + \varphi_1(1,\tau_2)(\tau_1+1)]$.

Тогда

$$J\varphi = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi^*(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)} d\tau_1 d\tau_2 + \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)} d\tau_1 d\tau_2 +$$

$$+ \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi_2(\tau_1,\tau_1)}{(\tau_1-t_2)(\tau_2-t_2)} d\tau_1 d\tau_2 = J\varphi^* + Jf + J\varphi_2. \tag{7.6}$$

Вычислим каждый из интегралов, стоящих в правой части формулы (7.6), в отдельности. При этом достаточно ограничиться построением кубатурных формул вычисления первого и третьего интеграла, так как второй из интегралов правой части (7.6) вычисляется точно.

Предположим сначала, что $\varphi \in H_{\alpha\alpha}(1)$ $(0 < \alpha \le 1)$, а интеграл $J\varphi$ вычисляется по кубатурным формулам вида (5.1), где $\rho_1 = \rho_2 = 0$.

Покроем область $\bar{D}$ квадратами Δ_{kl}, $k,l = 0,1,\ldots,n-1$, где $\Delta_{kl} =$
$= [x_k, x_{k+1}; x_l, x_{l+1}]$, $x_k = -1 + 2k/n$, $k = 0,1,\ldots,n$. Положим
$x_{-1} = -1 - 2/n, x_{n+1} = 1 + 2/n$. Пусть $(t_1,t_2) \in \Delta_{ij}$.

Обозначим через h_x и h_y расстояния $h_x = \min(|t_1 - x_i|, |t_1 - x_{i+1}|)$, $h_y = \min(|t_2 - x_j|, |t_2 - x_{j+1}|)$. Для определенности положим, что $h_x =$
$= |t_1 - x_i|$, $h_y = |t_2 - x_j|$.

Пусть $1 \le i, j \le n-2$. Обозначим через Δ_{ij}^0 область $[x_{i-1}, t_i + \frac{2}{n} + h_x; x_{j-1}, t_2 + \frac{2}{n} + h_y]$; через Δ_{ij}^* область $[x_{i-1}, t_1 + \frac{2}{n} + h_x; -1, 1] \cup \cup [-1, 1; x_{j-1}, t_2 + \frac{2}{n} + h_y]$. Для вычисления интеграла $J\varphi^*$ воспользуемся кубатурной формулой

$$J\varphi^* \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1}{}' \varphi^*(x'_k, x'_l) \int\int\limits_{\Delta_{kl}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1}{}'' \varphi^*(x'_k, x'_l) \int\int\limits_{\bar{\Delta}_{kl}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} + R_{nn}(\varphi^*). \qquad (7.7)$$

Здесь $\sum\sum'$ означает суммирование по квадратам Δ_{kl}, мера пересечения которых с областью Δ_{ij}^* равна нулю; $\sum\sum''$ означает суммирование по квадратам Δ_{kl}, мера пересечения которых с областью Δ_{ij}^* не равна нулю, $\bar{\Delta}_{kl}-$ дополнение области $\Delta_{kl} \cap \Delta_{ij}^*$ до квадрата Δ_{kl}.

Если $(i, j) = (0, 0), (n-1, 0), (0, n-1), (n-1, n-1)$, то интеграл $J\varphi^*$ вычисляется по формуле

$$J\varphi^* = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \varphi(x'_k, y'_l) \int\int\limits_{\bar{\Delta}_{kl}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} + R_{nn}(\varphi^*), \qquad (7.8)$$

где $\Delta_{00}^* = [0, 2t_1; -1, 1] \cup [-1, 1; 0, 2t_2]$. Области $\Delta_{ij}^*, (i, j) = (n-1, 0), (0, n-$

$- 1), (n-1, n-1)$ определяются аналогично.

Если $i = 0, j = 1, 2, \ldots, n-2$, то интеграл $J\varphi^*$ вычисляется по формуле

$$J\varphi^* = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1}{}' \varphi^*(x'_k, y'_l) \int\int\limits_{\Delta_{kl}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1}{}'' \varphi^*(x'_k, y'_l) \int\int\limits_{\bar{\Delta}_{kl}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} + R_{nn}(\varphi^*), \qquad (7.9)$$

где под Δ_{ij}^* понимается область $[0, 2t_1; -1, 1] \cup [-1, 1; x_{j-1}, x_{j+2}]$.

Аналогично вычисляется интеграл $J\varphi^*$ при $i = n-1, \quad j = 1, 2, \ldots, n-2; \quad i = 1, 2, \ldots, n-2, \quad j = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, n-2, \quad j = n-1$.

Погрешность кубатурной формулы (7.7) оценивается неравенством

$$|R_{nn}(\varphi^*)| \le \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}{}' \int\int\limits_{\Delta_{kl}} \left|\frac{\varphi^*(\tau_1,\tau_2)-\varphi^*(x'_k,x'_l)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}\right| d\tau_1 d\tau_2 +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}{}'' \int\int\limits_{\bar\Delta_{kl}} \left|\frac{\varphi^*(\tau_1,\tau_2)-\varphi^*(x'_k,x'_l)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}\right| d\tau_1 d\tau_2 +$$

$$+\left|\int\int\limits_{\Delta^*_{ij}} \frac{\varphi^*(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)} d\tau_1 d\tau_2\right| = r_1+r_2+r_3. \qquad (7.10)$$

Нетрудно видеть, что

$$r_1 \le 4\sum_{k=1}^{[n/2]}\sum_{l=1}^{[n/2]} \frac{n}{2k}\cdot\frac{n}{2l}\int\int\limits_{\Delta_{kl}} |\varphi^*(\tau_1,\tau_2)-\varphi^*(x'_k,x'_l)| d\tau_1 d\tau_2 \le$$

$$\le An^2\ln^2 n \int\limits_0^{1/n}\int\limits_0^{1/n} \tau_1^\alpha d\tau_1 d\tau_2 = \frac{A}{1+\alpha}\frac{1}{n^\alpha}\ln^2 n.$$

Оценим теперь интеграл r_2. Так как

$$\int\int\limits_{\Delta^*_{ij}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)} = 0,$$

то оценка r_2 проводится точно так же, как оценка r_1.

Оценим интеграл r_3

$$r_3 = \left|\int\int\limits_{\Delta^*_{ij}} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)-\varphi(t_1,\tau_2)-\varphi(\tau_1,t_2)+\varphi(t_1,t_2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)} d\tau_1 d\tau_2\right| \le$$

$$\le A\int\int\limits_{\Delta^0_{ij}} \frac{|\tau_1-t_1|^{\alpha/2}|\tau_2-t_2|^{\alpha/2}}{|\tau_1-t_1||\tau_2-t_2|} d\tau_1 d\tau_2 +$$

$$+4A\int\limits_{x_{i-1}}^{t_1+\frac{2}{n}+h_x}\int\limits_{x_{j+1}}^{1} \frac{|\tau_1-t_1|^\alpha d\tau_1 d\tau_2}{|\tau_1-t_1||\tau_2-t_2|} \le \frac{A\ln n}{n^\alpha}.$$

Из полученных выше оценок следует, что погрешность кубатурной формулы (7.7) оценивается неравенством $|R_{nn}(\varphi^*) \leq An^{-\alpha}\ln^2 n$.

Погрешность кубатурных формул (7.8) и (7.9) оценивается аналогично. Для определенности ограничимся оценкой погрешности кубатурной формулы (7.8). При этом справедливо неравенство вида (7.10), в котором сумма r_1 оценена выше. Осталось оценить слагаемые r_2 и r_3.

Для определенности предположим, что $i = j = 0$. Оценим слагаемое

$$\left| \int\int\limits_{\bar{\Delta}_{00}} \frac{\varphi^*(\tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} d\tau_1 d\tau_2 \right|.$$

Так как $\varphi^*(-1, t_2) = \varphi^*(1, t_2) = \varphi^*(t_1, -1) = \varphi^*(t_1, 1) = 0$, то $|\varphi^*(\tau_1, \tau_2)| = |\varphi^*(\tau_1, \tau_2) - \varphi(-1, \tau_2)| \leq A|\tau_1 + 1|^\alpha$; $|\varphi^*(\tau_1, \tau_2)| = |\varphi^*(\tau_1, \tau_2) - \varphi(\tau_1, -1)| \leq A|\tau_2 + 1|^\alpha$.

Следовательно, $|\varphi^*(\tau_1, \tau_2)| \leq A|\tau_1 + 1|^{\alpha/2}|\tau_2 + 1|^{\alpha/2}$ и

$$\left| \int\int\limits_{\bar{\Delta}_{00}} \frac{\varphi^*(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} \right| \leq A \int\int\limits_{\bar{\Delta}_{00}} \frac{|\tau_1 + 1|^{\alpha/2}||\tau_2 + 1|^{\alpha/2}}{|\tau_1 - t_1||\tau_2 - t_2|} d\tau_1 d\tau_2 \Bigg| \leq$$

$$\leq A \int\limits_{2h_x}^{2/n} \left| \frac{\tau_1 - t_1 - h_x}{\tau_1 - t_1} \right|^{\alpha/2} d\tau_1 \int\limits_{2h_y}^{2/n} \left| \frac{\tau_2 - t_2 - h_y}{\tau_2 - t_2} \right|^{\alpha/2} d\tau_2.$$

Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{2h_x}^{2/n} \frac{|\tau_1 - t_1 - h_x|^{\alpha/2}}{|\tau_1 - t_1|} d\tau_1 \leq 2^{1-\alpha/2} \int\limits_{2h_x}^{2/n} \frac{d\tau_1}{|\tau_1 - t_1|^{1-\alpha/2}} +$$

$$+2^{1-\alpha/2} h_x^{\alpha/2} \int\limits_{2h_x}^{2/n} \frac{d\tau}{|\tau_1 - t_1|} \leq A \left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha/2} + \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha/2} \ln n \right] \leq A \frac{\ln n}{n^{\alpha/2}}.$$

Таким образом,

$$\left| \int\int\limits_{\bar{\Delta}_{00}} \frac{\varphi^*(\tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} d\tau_1 d\tau_2 \right| \leq A \frac{\ln^2 n}{n^\alpha}.$$

Аналогичным образом оценивается сумма

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left|\int\int\limits_{\bar{\Delta}_{0k}}\frac{\varphi^*(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}\right|\le\sum_{k=1}^{n-1}\left|\int\int\limits_{\bar{\Delta}_{0k}}\frac{\varphi^*(\tau_1,\tau_2)-\varphi(-1,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}d\tau_1 d\tau_2\right|\le$$

$$\le A\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n}{2k}\left|\int\int\limits_{\bar{\Delta}_{0k}}\frac{|\tau_1+1|^\alpha}{|\tau_1-t_1|}d\tau_1\le A\ln n\int\limits_{h_k}^{2/n}\frac{|\tau_1+1|^\alpha}{|\tau_1-t_1|}d\tau_1\le An^{-\alpha}\ln^2 n.\right.$$

Построим теперь кубатурную формулу для вычисления интеграла $J\varphi_2$. Вычисление этого интеграла распадается на вычисление четырех повторных интегралов вида

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi_1(\tau_1,-1)(\tau_2-1)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}d\tau_1 d\tau_2=\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi_1(\tau_1,-1)}{(\tau_1-t_1)}d\tau_1\int\limits_{-1}^{1}\frac{(\tau_2-1)}{(\tau_2-t_2)}d\tau_2.$$

Второй из интегралов справа вычисляется точно, а для вычисления первого достаточно воспользоваться квадратурной формулой

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi_1(\tau_1,-1)}{(\tau_1-t_1)}d\tau_1=\sum_{k=1}^{n-2}\varphi_1(x'_k,-1)\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{d\tau_1}{(\tau_1-t_1)}+r_n,$$

погрешность которой равна $An^{-\alpha}\ln n$.

Аналогичным образом вычисляются остальные слагаемые, входящие в интеграл $J\varphi_2$. Таким образом, погрешность вычисления интеграла $J\varphi_2$ оценивается величиной $A\frac{\ln n}{n^\alpha}$. Объединяя полученные оценки и сравнивая их с оценками снизу погрешности вычисления полисингулярных интегралов кубатурными формулами вида (5.1) (см. параграф 5), убеждаемся в том, что построенная кубатурная формула является оптимальной по порядку.

Теорема 7.3 [38]. Среди всевозможных пассивных алгоритмов вычисления интеграла $J\varphi$, использующих $O(n)$ значений подынтегральной функции, оптимальным по порядку является метод вычисления интеграла $J\varphi$ по формулам (7.6) – (7.9). Погрешность этого метода равна $An^{-\alpha/2}\ln^2 n$.

Построим теперь оптимальную по порядку кубатурную формулу вычисления интегралов (7.1) в области D на классе функций $W^{r,r}(1)$. Для

этого, как и выше, представим интеграл $J\varphi$ в виде (7.6) и построим кубатурные формулы вычисления интегралов $J\varphi^*$ и $J\varphi_2$.

Для вычисления интеграла $J\varphi_2$ нужно воспользоваться квадратурной формулой вычисления сингулярных интегралов

$$K\varphi = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

с ядром Коши на множестве функций $\varphi(\tau)$, принадлежащих классу функций $W^r(1)$ и удовлетворящих дополнительному условию $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$. Такие формулы были построены в главе 3.

Введем узлы $x_k = -1 + 2k/n, \quad k = 0, 1, \ldots, n$. Через x'_k обозначим узлы $x'_k = (x_k + x_{k+1})/2, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Обозначим через $\zeta_k (k = 1, 2, \ldots, r)$ узлы полинома Чебышева первого рода. Образы этих узлов при отображении сегмента $[\zeta_1, \zeta_r]$ на сегмент $\Delta_k = [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, обозначим через $\zeta_1^k, \ldots, \zeta_r^k$. Полином, интерполирующий функцию $\varphi(t)$ в сегменте Δ_k по узлам $\zeta_1^k, \ldots, \zeta_r^k$, обозначим через $L_r(\varphi, \Delta_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$. Сплайн, составленный из полиномов $L_r(\varphi, \Delta_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$, обозначим через $\varphi_r(t)$.

Интеграл $K\varphi$ будем вычислять по квадратурной формуле

$$K\varphi \equiv \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi_r(\tau)}{\tau - t} d\tau + R_n(\varphi). \tag{7.11}$$

Повторяя рассуждения, неоднократно проведенные в главе 3, можно показать, что $|R_n(\varphi)| \le An^{-r} \ln n$ для всех $\varphi \in W^r(1)$.

Приступим к построению оптимальной по порядку кубатурной формулы вычисления интеграла $J\varphi^*$.

Напомним, что по построению функция φ^* принадлежит классу функций $W^{r,r}(M)$ и обращается в нуль на границе области $\bar{D}$. Покроем область $\bar{D}$ квадратами Δ_{kl}, $k, l = 0, 1, \ldots, n-1$, где $\Delta_{kl} = [x_k, x_{k+1}; x_l, x_{l+1}]$, $x_k = -1 + 2k/n$, $k = 0, 1, \ldots, n$. В каждом квадрате Δ_{kl}, $k, l = 0, 1, \ldots, n-1$, функцию $\varphi^*(t_1, t_2)$ будем аппроксимировать интерполяционным полиномом $L_r(\varphi^*, \Delta_{kl}) = L_r^{t_1}\left(L_r^{t_2}(\varphi^*[\cdot; x_l, x_{l+1}]); [x_k, x_{k+1}; \cdot]\right)$, где верхние индексы t_1 и t_2 означают переменную, по которой проводится интерполяция. Сплайн, составленный из полиномов $L_r(\varphi^*, \Delta_{kl})$, $k, l = 0, 1, \ldots, n-1$, обозначим через $\varphi_r^*(t_1, t_2)$.

Интеграл $J\varphi^*$ будем приближать кубатурной формулой

$$J\varphi^* = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi_r^*(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)} d\tau_1 d\tau_2 + R_n(\varphi^*). \tag{7.12}$$

Оценим погрешность этой кубатурной формулы. Пусть $(t_1,t_2) \in \in \Delta_{ij}$. Как и при рассмотрении кубатурных формул на классе Гельдера, введем величины h_x и h_y и предположим, что $h_x = t_1 - x_{i-1}$, $h_y = = t_2 - x_{j-1}$.

Введем обозначения: $\Delta_0, \Delta_0^*, \bar{\Delta}_{kl}, \quad k,l = 0,1,\ldots,n-1$.

Эти обозначения зависят от индексов i,j кубов Δ_{ij}, в которых расположены точки (t_1,t_2).

Пусть $1 \le i,j \le n-2$. Тогда $\Delta_0 = \bar{D} \cap ([x_{i-1}, t_i + 2/n + h_x; -1, 1] \cup \cup [-1,1; x_{j-1}, t_j + 2/n + h_y])$, $\Delta_0^* = \bar{D} \cap ([x_{i-1}, t_i + 2/n + h_x; x_{j-1}, t_j + 2/n + + h_y])$, $\bar{\Delta}_{kl} = \Delta_{kl} \setminus (\Delta_{kl} \cap \Delta_0), \quad k,l = 0,1,\ldots,n-1$.

Пусть $(i,j) = (0,0)$. Тогда $\Delta_0 = \bar{D} \cap ([x_i, t_i + h_x; -1, 1] \cup [-1,1; x_j, t_j + + h_y])$, $\Delta_0^* = \bar{D} \cap ([x_i, t_i + h_x; x_j, t_j + h_y])$, $\bar{\Delta}_{kl} = \Delta_{kl} \setminus (\Delta_{kl} \cap \Delta_0)$, $k,l = = 0,1,\ldots,n-1$.

В случаях, когда $(i,j) = (0,n-1), (n-1,0), (n-1,n-1)$, области $\Delta_0, \Delta_0^*, \bar{\Delta}_{kl}, \quad k,l = 0,1,\ldots,n-1$, определяются по аналогии с предыдущим случаем.

Оценим погрешность кубатурной формулы (7.12):

$$|R_n(\varphi^*)| \le \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}{}' \left| \int\int\limits_{\Delta_{kl}} \frac{\varphi^*(\tau_1,\tau_2) - \varphi_r^*(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)} d\tau_1 d\tau_2 \right| +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}{}'' \left| \int\int\limits_{\bar{\Delta}_{kl}} \frac{\varphi^*(\tau_1,\tau_2) - \varphi_r^*(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)} d\tau_1 d\tau_2 \right| +$$

$$+ \left| \int\int\limits_{\Delta_0} \frac{\varphi^*(\tau_1,\tau_2) - \varphi_r^*(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)} d\tau_1 d\tau_2 \right| = r_1 + r_2 + r_3. \tag{7.13}$$

Здесь $\sum\sum'$ означает суммирование по квадратам, мера пересечения которых с областью Δ_0 равна нулю, $\sum\sum''$ означает суммирование по остальным квадратам.

Оценим каждое из выражений $r_1 - r_3$ в отдельности.

Нетрудно видеть, что

$$r_1 \le 4n^2 \sum_{k=1}^{[n/2]} \sum_{l=1}^{[n/2]} \frac{1}{kl} \int\int\limits_{\Delta_{kl}} |\varphi^*(\tau_1,\tau_2) - \varphi_r^*(\tau_1,\tau_2)| d\tau_1 d\tau_2 \le \frac{A}{n^r} \ln^2 n; \quad (7.14)$$

$$r_2 \le 2n^2 \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{1}{k} \int\int\limits_{\bar\Delta_{k,j+1}} |\varphi^*(\tau_1,\tau_2) - \varphi_r^*(\tau_1,\tau_2)| d\tau_1 d\tau_2 +$$

$$+2n^2 \sum_{l=1}^{[n/2]} \frac{1}{l} \int\int\limits_{\bar\Delta_{i+1,l}} |\varphi^*(\tau_1,\tau_2) - \varphi_r^*(\tau_1,\tau_2)| d\tau_1 d\tau_2 \le \frac{A}{n^r} \ln n. \quad (7.15)$$

Приступим к оценке r_3. Предположим вначале, что $1 \le i, j \le n-2$. В этом случае

$$r_3 = \left| \int\int\limits_{\Delta_0} \frac{\psi_r(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} d\tau_1 d\tau_2 \right| \le$$

$$\le \left| \int\int\limits_{\Delta_0^*} \frac{\psi_r(\tau_1,\tau_2) - \psi_r(t_1,\tau_2) - \psi_r(\tau_1,t_2) + \psi_r(t_1,t_2)}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} d\tau_1 d\tau_2 \right| +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \int\limits_{x_{j-1}}^{t_2+2/n+h_y} \frac{\psi_r(\tau_1,\tau_2) - \psi_r(\tau_1,t_2)}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} d\tau_1 d\tau_2 \right| +$$

$$+ \sum_{l=0}^{n-1} \left| \int\limits_{x_{i-1}}^{t_1+2/n+h_x} \int\limits_{x_l}^{x_{l+1}} \frac{\psi_r(\tau_1,\tau_2) - \psi_r(t_1,\tau_2)}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} d\tau_1 d\tau_2 \right| = r_{31} + r_{32} + r_{33}, \quad (7.16)$$

где $\psi_r(\tau_1,\tau_2) = \varphi^*(\tau_1,\tau_2) - \varphi_r^*(\tau_1,\tau_2)$.

Для дальнейшего необходимо оценить величину

$$\sup_{t_1,\tau_1 \in [x_{i-1}, x_{i+2}]} \frac{|\psi_r^*(\tau_1,t_2) - \psi_r^*(t_1,t_2)|}{|\tau_1 - t_1|}.$$

В случае, если τ_1 и t_1 принадлежат сегменту $[x_i, x_{i+1}]$, из неравенства $|\psi_r(\tau_1, t_2)| \le \frac{A}{n^r}$, применяя неравенство А.А. Маркова и повторяя доказательство теоремы С.Н. Бернштейна о структурных свойствах функций, имеем $|\psi_r^{(1,0)}(\tau_1, t_2)| \le Ar^2 n^{-r+1}$. Поэтому $|\psi_r(\tau_1, t_2) -$
$- \psi_r(t_1, t_2)| \le |\psi_r^{(1,0)}(\theta, t_2)||\tau_1 - t_1| \le An^{-r+1}|\tau_1 - t_1|$.

Рассмотрим теперь случай, когда точка $\tau_1 \in [x_{i-1}, x_i)$, а точка $t_1 \in [x_i, x_{i+1}]$. В этом случае

$$|\psi_r(\tau_1, t_2) - \psi_r(t_1, t_2)| \le |\psi_r(\tau_1, t_2) - \psi_r(x_i, t_2)| +$$

$$+|\psi_r(x_i, t_2) - \psi_r(t_1, t_2)| \le An^{-r+1}(|\tau_1 - x_i| + |x_i - t_1|) \le An^{-r+1}|\tau_1 - t_1|.$$

Заметив, что $|\psi_r(\tau_1, \tau_2) - \psi_r(t_1, \tau_2) - \psi_r(\tau_1, t_2) + \psi_r(t_1, t_2)| \le An^{(r-1)}|\tau_1 -$
$- t_1|^{1/2}|\tau_2 - t_2|^{1/2}$, имеем

$$r_{31} \le \frac{A}{n^{r-1}} \le \int\int\limits_{\Delta_0^*} (|\tau_1 - t_1||\tau_2 - t_2|)^{1/2} d\tau_1 d\tau_2 \le \frac{A}{n^r}. \tag{7.17}$$

Оценки выражений r_{32} и r_{33} проводятся аналогично. Поэтому ограничимся оценкой r_{32} :

$$r_{32} \le \frac{A}{n^{r-1}} \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{n}{k} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \int\limits_{y_{j-1}}^{t_2+2/n+h_y} d\tau_1 d\tau_2 \le \frac{A}{n^r} \ln n. \tag{7.18}$$

Из (7.17)–(7.18) следует, что при $1 \le i,\ j \le n-2$

$$r_3 \le An^{-r} \ln n. \tag{7.19}$$

Оценим величины r_2, r_3 в предположении, что i и j (вместе или порознь) принимают значения 0 или $n-1$. Для определенности ограничимся случаем, когда $i = j = 0$. В этом случае величина r_2 оценивается последовательностью неравенств

$$r_2 \le \int\limits_{t_1+h_x}^{x_2} \int\limits_{t_2+h_y}^{x_2} \frac{|\psi_r(\tau_1, \tau_2)| d\tau_1 d\tau_2}{|\tau_1 - t_1||\tau_2 - t_2|} + \sum_{k=2}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \int\limits_{t_2+h_y}^{x_2} \frac{|\psi_r(\tau_1, \tau_2)| d\tau_1 d\tau_2}{|\tau_1 - t_1||\tau_2 - t_2|} +$$

$$+ \sum_{l=2}^{n-1} \int\limits_{t_1+h_x}^{x_2} \int\limits_{x_l}^{x_{l+1}} \frac{|\psi_r(\tau_1, \tau_2)| d\tau_1 d\tau_2}{|\tau_1 - t_1||\tau_2 - t_2|} = r_{21} + r_{22} + r_{23}. \tag{7.20}$$

Оценим каждое из этих выражений в отдельности. Вначале оценим величину r_{21}. Предварительно заметим, что

$$|\psi_r(\tau_1,\tau_2)| = |\psi_r(\tau_1,\tau_2) - \psi_r(-1,\tau_2) - \psi_r(\tau_1,-1) + \psi_r(-1,-1)| \le$$
$$\le \frac{A(|\tau_1+1||\tau_2+1|)^{1/2}}{n^{r-1}} \le$$
$$\le \frac{A(|\tau_1-t_1|^{1/2}+|t_1+1|^{1/2})(|\tau_2-t_2|^{1/2}+|t_2+1|^{1/2})}{n^{r-1}} =$$
$$= \frac{A}{n^{r-1}}(|\tau_1-t_1|^{1/2}|\tau_2-t_2|^{1/2} + |\tau_1-t_1|^{1/2}|t_2+1|^{1/2} +$$
$$+|t_1+1|^{1/2}|\tau_2-t_2|^{1/2} + |t_1+1|^{1/2}|t_2+1|^{1/2}).$$

Следовательно,

$$r_{21} \le \frac{A}{n^{r-1}} \int\limits_{t_1+h_x}^{x_2} \int\limits_{t_2+h_y}^{x_2} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{|\tau_1-t_1|^{1/2}|\tau_2-t_2|^{1/2}} + \cdots +$$
$$+\frac{A}{n^{r-1}} \int\limits_{t_1+h_x}^{x_2} \int\limits_{t_2+h_y}^{x_2} \frac{|t_1+1|^{1/2}|t_2+1|^{1/2} d\tau_1 d\tau_2}{|\tau_1-t_1||\tau_2-t_2|} \le \frac{A}{n^r}. \tag{7.21}$$

Выражения r_{22} и r_{23} оцениваются аналогично. Поэтому ограничимся оценкой первого из них. Очевидно,

$$r_{22} \le \sum_{k=2}^{n-1} \frac{n}{k} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \int\limits_{t_2+h_y}^{x_2} \frac{|\psi_r(\tau_1,\tau_2) - \psi_r(\tau_1,-1)| d\tau_1 d\tau_2}{|\tau_2-t_2|} \le$$
$$\le \frac{A}{n^{r-2}} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \int\limits_{t_2+h_y}^{x_2} \frac{(|\tau_2-t_2| + |t_2+1|) d\tau_1 d\tau_2}{|\tau_2-t_2|} \le \frac{A}{n^r} \ln n. \tag{7.22}$$

Из оценок (7.20)–(7.22) следует, что

$$r_2 \le \frac{A \ln^2 n}{n^r}. \tag{7.23}$$

Осталось оценить r_3 :

$$r_3 \le \left| \int\limits_{-1}^{t_1+h_x} \int\limits_{-1}^{t_2+h_y} \frac{\psi_r(\tau_1,\tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_1)} \right| + \left| \int\limits_{t_1+h_x}^{x_2} \int\limits_{-1}^{t_2+h_y} \frac{\psi_r(\tau_1,\tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)} \right| +$$

$$+\left|\int\limits_{-1}^{t_1+h_x}\int\limits_{t_2+h_y}^{x_2}\frac{\psi_r(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}\right|+\left|\int\limits_{t_1+h_x}^{x_2}\int\limits_{t_2+h_y}^{x_2}\frac{\psi_r(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}\right|+$$

$$+\sum_{k=2}^{n-1}\left|\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{-1}^{t_2+h_y}\frac{\psi_r(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}\right|+$$

$$+\sum_{l=2}^{n-1}\left|\int\limits_{-1}^{t_1+h_x}\int\limits_{x_l}^{x_{l+1}}\frac{\psi_r(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}\right|=r_{31}+\cdots+r_{36}. \qquad (7.24)$$

Интеграл r_{31} оценивается по той же схеме, что и интеграл r_{31} в неравенстве (7.19) и для него также справедлива оценка (7.17).

Для оценки выражений $r_{32}-r_{36}$ заметим, что

$$\left|\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{-1}^{t_2+h_y}\frac{\psi_r(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}\right|=$$

$$=\left|\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{-1}^{t_2+h_y}\frac{\psi_r(\tau_1,\tau_2)-\psi_r(\tau_1,t_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}\right|\le$$

$$\le\frac{A}{k}\frac{1}{n^{r-2}}(x_{k+1}-x_k)(t_2+h_y+1)\le\frac{A}{k}\frac{1}{n^r}$$

и, следовательно,

$$r_{35}+r_{36}\le\frac{A}{n^r}\ln n. \qquad (7.25)$$

Осталось оценить выражения r_{32}, r_{33}, r_{34}. Так как они оцениваются одинаково, ограничимся рассмотрением выражения r_{32} :

$$r_{32}\le\left|\int\limits_{t_1+h_x}^{x_2}\int\limits_{-1}^{t_2+h_y}\frac{|\psi_r(\tau_1,\tau_2)-\psi_r(\tau_1,t_2)-\psi_r(-1,\tau_2)+\psi_r(-1,t_2)|d\tau_1 d\tau_2}{|\tau_1-t_1||\tau_2-t_2|}\right|\le$$

$$\le\frac{A}{n^{r-1}}\int\limits_{t_1+h_x}^{x_2}\int\limits_{-1}^{t_2+h_y}\frac{|\tau_1+1|^{1/2}|\tau_2-t_2|^{1/2}}{|\tau_1-t_1||\tau_2-t_2|}d\tau_1 d\tau_2\le\frac{A\ln n}{n^r}. \qquad (7.26)$$

Интегралы r_{33}, r_{34} оцениваются аналогично.

Из оценок (7.18), (7.24) – (7.26) следует, что

$$r_3 \leq \frac{A \ln^2 n}{n^r}. \tag{7.27}$$

Собирая оценки (7.11) – (7.27) убеждаемся, что погрешность построенной кубатурной формулы оценивается неравенством

$$R_{nn} \leq \frac{A \ln^2 n}{n^r}.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 7.4 [38]. Метод вычисления полисингулярных интегралов вида (7.1) при $-1 < t_1, t_2 < 1$ на классе $W^{r,r}(M)$, заключающийся в представлении интеграла (7.1) в виде суммы интегралов (7.6) и последующего вычисления интегралов $J\varphi_2$ и $J\varphi^*$ по кубатурным формулам (7.11) и (7.12), является оптимальным по порядку среди всевозможных кубатурных формул, использующих n^2 значений подынтегральной функции. Погрешность этого метода равна $An^{-r} \ln^2 n$.

Аналогичным образом доказывается следующее утверждение.

Теорема 7.5. Метод вычисления полисингулярных интегралов вида (7.1) при $-1 < t_1, t_2 < 1$ на классе $C_2^r(M)$, заключающийся в представлении интеграла (7.1) в виде суммы интегралов (7.6) и последующего вычисления интегралов $J\varphi_2$ и $J\varphi^*$ по кубатурным формулам (7.11) и (7.12), является оптимальным по порядку среди всевозможных кубатурных формул, использующих n^2 значений подынтегральной функции. Погрешность этого метода равна $An^{-r} \ln^2 n$.

7.3. Оптимальные методы восстановления сопряженных функций

Из результатов, полученных в двух предыдущих разделах, вытекает следующий способ построения оптимальных по порядку алгоритмов восстановления сопряженных функций.

Предположим для определенности, что рассматривается интеграл (7.1) на классе функций $C_2^s(1)$.

В разд. 7.1 было показано, что если функция $\varphi \in C_2^s(1)$ и обращается в нуль на границе ∂D области D вместе с производными до r-го порядка

включительно, то сопряженная функция $\tilde{\varphi}(t_1, t_2) = J\varphi$ принадлежит классу функций $Q_{r,\gamma}(\bar{D}, M)$, где $s = r + \gamma$, $M-$ некоторая константа, которая может быть легко оценена на основании результатов разд. 7.1.

В монографии автора [35] показано, что оптимальным методом восстановления функций из класса $Q_{r,\gamma}(\bar{D}, M)$ является локальный сплайн, построение которого описано ниже. Так как оценка точности восстановления функций из класса $Q_{r,\gamma}$ существенно зависит от размерности пространства, то построение локального сплайна опишем для l-мерного пространства.

Теорема 7.5 [35]. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l, l \geq 2$. Тогда справедлива оценка

$$d_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M)) \asymp \delta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M)) \asymp$$

$$\asymp \begin{cases} n^{-(s-\gamma)/(l-1)} & v > l/(l-1); \\ n^{-s/l}(\ln n)^{s/l} & v = l/(l-1); \\ n^{-s/l} & v < l/(l-1), \end{cases}$$

где $v = s/(s - \gamma)$.

Доказательство. Обозначим через Δ_k множество точек $x = (x_1, \ldots, x_l)$ из Ω, расстояние от которых до границы Γ области Ω удовлетворяет неравенству $(k/N)^v \leq \rho(x, \Gamma) \leq ((k+1)/N)^v$. В каждой области Δ_k разместим кубы $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, ребра которых равны $h_k = ((k+1)/N)^v - (k/N)^v$. Общее число кубов, которые можно разместить в области Ω, оценивается неравенствами

$$1+m\sum_{k=0}^{N-1}\left[\frac{2(N^v-(k+1)^v)}{(k+1)^v-k^v}\right]^{l-1} \leq n \leq 1+m\sum_{k=0}^{N-1}\left(\left[\frac{2(N^v-k^v)}{(k+1)^v-k^v}\right]+1\right)^{l-1},$$

где $m-$ число граней куба $\Omega, [\alpha]-$ целая часть числа α.

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{k=0}^{N-1}(N^v k^{1-v} - k)^{l-1} = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{l-1}(-1)^j C^j_{l-1}(N^v k^{1-v})^{l-1-j}k^j =$$

$$= A\begin{cases} N^{v(l-1)} & v > l/(l-1); \\ N^l & v < l(l-1); \\ N^l \ln N & v = l(l-1). \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{n} \asymp \begin{cases} N^{v(l-1)} & v > l/(l-1); \\ N^l & v < l(l-1); \\ N^l \ln N & v = l(l-1). \end{cases}$$

Пусть $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l} = [b^k_{i_1}, b^k_{i_1+1}; \dots; b^k_{i_l}, b^k_{i_l+1}]$. В каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ построим функцию

$$\psi(x_1,\dots,x_l) = \frac{((x_1 - b^k_{i_1})(b^k_{i_1+1} - x_1)\dots(x_l - b^k_{i_l})(b^k_{i_l+1} - x_l))^s}{h_k^{(2l-1)}((k+1)/N)^{v\gamma}}.$$

Константа A подбирается из требования, чтобы

$$\psi(x_1,\dots,x_l) \in Q_{r,\gamma}(\Omega, M).$$

Максимальное значение функции ψ в каждом кубе равно AN^{-s}. Учитывая соотношение, связывающее числа n и N, и используя теорему Борсука [145], получаем оценку снизу поперечника Бабенко.

Построим сплайн $f_N(t_1,\dots,t_l)$, реализующий эту оценку. Выше было описано разбиение куба Ω на области Δ_k. Построение сплайна начнем с куба Δ_{N-1}. В этом кубе функцию $f(t_1,\dots,t_l)$ аппроксимируем интерполяционным полиномом

$$f_N(t_1,\dots,t_l;\Delta_{N-1}) = P_{s,\dots,s} f(t_1,\dots,t_l).$$

Здесь $P_{s,\dots,s} = P_s^{t_1}\dots P_s^{t_l}$, а через $P_s^{t_i}$ обозначен многочлен

$$P_s\left(t_i, \left[-1 + \left(\frac{N-1}{N}\right)^v, 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^v\right]\right),$$

действующий по переменной t_i. Опишем построение интерполяционного полинома $P_s(t,[a,b])$, аппроксимирующего функцию $f(t)$ на сегменте $[a,b]$. Обозначим через $\zeta_k (k = 1,2,\dots,s)$ нули полинома Чебышева первого рода степени s, наименее уклоняющегося от нуля на сегменте $[-1,1]$. Отобразим сегмент $[\zeta_1,\zeta_s] \subset [-1,1]$ на сегмент $[a,b]$ таким образом, чтобы точки ζ_1 и ζ_s перешли в точки a и b .

Точки, являющиеся образами точек ζ_i при отображении сегмента $[\zeta_1,\zeta_s]$ на сегмент $[a,b]$ обозначим через $\zeta_i{}', i = 1,2,\dots,s$. По узлам $\{\zeta_i'\}$ строится интерполяционный полином степени $s-1$, который обозначается через $P_s(t,[a,b])$.

Перейдем к области Δ_{N-2}. Эта область разбивается на кубы $\Delta^{N-2}_{i_1,\dots,i_l}$, причем разбиение происходит таким образом, чтобы вершины куба Δ_{N-1} входили в число точек разбиения. В каждом из кубов $\Delta^{N-2}_{i_1,\dots,i_l}$ полином $f_N(t_1,\dots,t_l;\Delta^{N-2}_{i_1,\dots,i_l})$ определяется формулой

$$f_N(t_1,\dots,t_l;\Delta^{N-2}_{i_1,\dots,i_l}) = P_{s,\dots,s}\overline{f}(t_1,\dots,t_l),$$

где функция $\overline{f}(t_1,\dots,t_l)$ равна $f(t_1,\dots,t_l)$ во всех узлах интерполирования, кроме тех, которые расположены на гранях куба Δ_{N-1}. В этих узлах значения $\overline{f}(t_1,\dots,t_l)$ полагаются равными значениям полинома $P_{s,\dots,s}f(t_1,\dots,t_l;\Delta_{N-1})$.

Описанным образом проводится аппроксимация во всех областях Δ^i при $i \geq 0$. Полученный при этом сплайн обозначим через $f_N(t_1,\dots,t_l)$.

Нетрудно видеть, что сплайн $f_N(t_1,\dots,t_l)$ непрерывен в Ω, имеет размерность n. Следовательно, справедливо неравенство

$$d_n(Q_{r,\gamma}(\Omega,M)) \leq$$

$$\leq A \begin{cases} n^{-(s-\gamma)/(l-1)} & \text{v} > \text{l}/(\text{l}-1), \\ n^{-s/l}(\ln n)^{s/l} & \text{v} = \text{l}/(\text{l}-1), \\ n^{-s/l} & \text{v} < \text{l}/(\text{l}-1), \end{cases} \tag{7.28}$$

где $v = s/(s-\gamma)$.

Из полученных выше оценок и известного [145] неравенства $\delta_{2n+1}(X) \leq 2d_n(X,B)$ следует справедливость теоремы.

Продолжим исследование оптимальных методов восстановления сопряженных функций $\tilde{\varphi}(t_1,t_2) = J\varphi$, где $\varphi \in C^s_2(1)$.

Положим $l = 2$ и построим описанным выше способом сплайн $\tilde{\varphi}_n(t_1,t_2)$, аппроксимирующий сопряженную функцию $\tilde{\varphi}(t_1,t_2)$. Если известны точные значения функции $\tilde{\varphi}(t_1,t_2)$ в узлах сплайна, то погрешность аппроксимации сопряженной функции $\tilde{\varphi}(t_1,t_2)$ оценивается правой частью формулы (7.28).

Однако точные значения сопряженной функции в узлах локального сплайна неизвестны, а вычисляются по кубатурным формулам, описанным в разд. 7.2. Погрешность этих кубатурных формул на классе $C^s_2(D)$ равна $O(m^{-s}ln^2m)$, где m^2- число узлов кубатурной формулы.

Таким образом, представляется естественным следующий способ восстановления сопряженных функций $\tilde{\varphi} = J\varphi$, где $\varphi \in C^s_2(1)$. В узлах

локального сплайна $\tilde{\varphi}_n(t_1,t_2)$ (размерность сплайна n будет определена ниже) вычисляются значения сопряженной функции $\tilde{\varphi}(t_1,t_2)$ по кубатурной формуле, описанной в разд. 7.2 и использующей m^2 значений функции $\varphi(t_1,t_2)$. (Число узлов m^2 кубатурной формулы связано с размерностью сплайна $\tilde{\varphi}_n(t_1,t_2)$ и определяется ниже). По вычисленным в узлах локального сплайна значениям интеграла $(J\varphi)(t_1,t_2)$ строится локальный сплайн, который обозначим через $\tilde{\varphi}_{nm}(t_1,t_2)$. Оценим точность восстановления сопряженной функции $\tilde{\varphi}(t_1,t_2)$ локальным сплайном $\tilde{\varphi}_{nm}(t_1,t_2)$. Напомним, что локальный сплайн $\tilde{\varphi}_{nm}(t_1,t_2)$ состоит из интерполяционных полиномов не выше s порядка. Таким образом,

$$\|\tilde{\varphi}(t_1,t_2)-\tilde{\varphi}_{nm}(t_1,t_2)\|_C \le$$

$$\le \|\tilde{\varphi}(t_1,t_2)-\tilde{\varphi}_n(t_1,t_2)\|_C + \|\tilde{\varphi}_n(t_1,t_2)-\tilde{\varphi}_{nm}(t_1,t_2)\|_C \le$$

$$\le A\lambda_s^2 m^{-s} ln^2 m + A \begin{cases} n^{-(s-\gamma)/(l-1)} & \text{v} > \text{l}/(\text{l}-1), \\ n^{-s/l}(\ln n)^{s/l} & \text{v} = \text{l}/(\text{l}-1), \\ n^{-s/l} & \text{v} < \text{l}/(\text{l}-1), \end{cases}$$

где λ_s- константа Лебега.

Из полученного неравенства очевидно, что значения n и m следует подбирать таким образом, чтобы их вклад в погрешность восстановления сопряженной функции $\tilde{\varphi}(t_1,t_2)$ был равносильным.

Предположим, что нужно восстановить функцию $\tilde{\varphi}(t_1,t_2)$ с точностью ϵ. По значению ϵ выбирается число узлов локального сплайна по формуле

$$n \asymp \begin{cases} \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{(l-1)/(s-\gamma)} & \text{v} > \text{l}/(\text{l}-1), \\ \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{l/s} |\ln\epsilon| & \text{v} = \text{l}/(\text{l}-1), \\ \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{l/s} & \text{v} < \text{l}/(\text{l}-1). \end{cases} \tag{7.29}$$

По данному же значению ϵ выбирается и число m по формуле $m^{-s}\ln^2 m = \epsilon$. Очевидно,

$$m \asymp \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{1/s} |\ln\epsilon|^{2/s}. \tag{7.30}$$

Таким образом, чтобы восстановить функцию $\tilde{\varphi}(t_1,t_2)$ с точностью ϵ, достаточно вычислить в узлах локального сплайна $\tilde{\varphi}_n(t_1,t_2)$, где n связано с ϵ по формуле(7.29), значения интеграла $J\varphi(t_1,t_2)$ по формулам, приведенным в пункте 7.2 и использующим $O(m^2)$ значений функции φ. Число m определено формулой (7.30).

Замечание. Аналогичным образом строятся оптимальные методы восстановления сопряженных функций и на других классах функций.

ГЛАВА 5

АДАПТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В монографии [35] (1 − 3 главы) построены адаптивные алгоритмы восстановления функций и вычисления регулярных интегралов на классах функции $W^rL_p, Q_{r,\gamma,p}([-1,1]^l), l \geq 1$. При этом было отмечено, что на этих классах адаптивные алгоритмы значительно точнее пассивных. Оказывается, что это свойство адаптивных алгоритмов имеет место и при вычислении сингулярных интегралов на классе функций W^rL_p (и на некоторых других классах).

Данная глава посвящена исследованию адаптивных алгоритмов вычисления сингулярных интегралов следующих видов:

$$K\varphi = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \tag{.1}$$

$$M\varphi = \int\limits_{D} \frac{f(\theta)\varphi(\tau)}{(r(t,\tau))^l} d\tau, \tag{.2}$$

$$F\varphi = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi(\sigma_1, \sigma_2) \mathrm{ctg} \frac{\sigma_1 - \mathrm{s}_1}{2} \mathrm{ctg} \frac{\sigma_2 - \mathrm{s}_2}{2} \mathrm{d}\sigma_1 \mathrm{d}\sigma_2. \tag{.3}$$

В интеграле (B.2) использованы обозначения:

$$D = [0,1]^l,\ l \geq 2, t = (t_1, \ldots, t_l),\ \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_l),\ \theta = (t - \tau)/r(t,\tau),$$

$$r(t,\tau) = \left[\sum_{k=1}^{l} (t_k - \tau_k)^2 \right]^{1/2}.$$

Задача построения адаптивного алгоритма вычисления сингулярного интеграла $K\varphi$ на классе $W_p^r(1)$ заключается в следующем. Сегмент $[-1,1]$ последовательно разбивается на более мелкие сегменты $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}],\ k = 0, 1, \ldots, N-1$. В каждой области разбиения интеграл вычисляется по к.ф. одного и того же вида. Необходимо построить такой алгоритм последовательного разбиения сегмента $[-1,1]$ на более мелкие сегменты Δ_k, чтобы в результате его использования на каждом сегменте

Δ_k погрешность вычисления интеграла была одного и того же порядка и не зависела от величины параметра $t(-1 < t < 1)$. Аналогичным образом ставится задача построения адаптивных алгоритмов вычисления сингулярных интегралов (B.2), (B.3).

1. Адаптивные алгоритмы вычисления одномерных сингулярных интегралов

Теорема 1.1 [36]. Пусть $\varphi(t) \in W_p^r(1),\ r = 1, 2, \ldots,\ 1 < p < < \infty,\ rp > 2$. Существует адаптивный алгоритм вычисления интегралов вида $K\varphi$, использующий значения подынтегральной функции $\varphi(t)$ и ее производных до $r-1$-го порядка в n узлах и имеющий погрешность

$$R_n(\varphi) \le An^{-r} \ln n.$$

Замечания. 1. В главе 3 показано, что верхняя грань оценки снизу погрешности к.ф. вычисления сингулярных интегралов $K\varphi$ на классе $W_p^r(1),\ 1 < p < \infty$, использующих n значений подынтегральной функции $\varphi(t)$, есть величина, не превосходящая $An^{-r+1/p}$. Из сопоставления этой оценки и утверждения теоремы 1.1 следует, что на классе $W_p^r(1)$ адаптивные алгоритмы вычисления сингулярных интегралов значительно точнее пассивных.

2. Теорема справедлива, если используются только значения подынтегральной функции в n узлах.

Доказательство теоремы 1.1. Разобъем сегмент $[-1, 1]$ на N равных частей точками $w_k = -1 + 2k/N,\ k = 0, 1, \ldots N$. В каждом сегменте $\Delta_k = [w_k, w_{k+1}],\ k = 0, 1, \ldots, N-1$, функция $\varphi(t)$ аппроксимируется отрезком ряда Тейлора $T_{r-1}(\varphi, \Delta_k, c_k)$, причем $c_k = w_k$, если $\Delta_k \in [-1, 0]$ и $c_k = w_{k+1}$ если $\Delta_k \in [0, 1]$. Если $0 \in \Delta_k$, то в качестве узла c_k может быть выбрана как точка w_k, так и точка w_{k+1}. Погрешность аппроксимации на сегменте Δ_k равна

$$|\varphi(t) - T_{r-1}(\varphi, \Delta_k, w_k)| \le \frac{1}{(r-1)!} \left| \int\limits_{w_k}^{t} (t-\tau)^{r-1} \varphi^{(r)}(\tau) d\tau \right| \le$$

$$\le \frac{1}{(r-1)!} h_k^{r-1/p} \|\varphi^{(r)}\|_{L_p(\Delta_k)},$$

где $h_k = |w_{k+1} - w_k|$. Введем обозначение $\psi(\Delta_k) = \|\varphi^{(r)}\|_{L_p(\Delta_k)}$. Пусть $\psi(\Delta_k) = m_k h_k^{1/p}$. Рассмотрим две возможности: 1)$m_k \le 1, \quad m_k > 1$.

В первом случае

$$|\varphi(t) - T_{r-1}(\varphi, \Delta_k, c_k)| \le A h_k^r \le A N^{-r}$$

и, следовательно, на сегментах, для которых выполнено это условие, аппроксимация функции $\varphi(t)$ осуществляется полиномом $T_{r-1}(\varphi, \Delta_k, c_k)$.

Перейдем ко второму случаю. Пусть $\psi(\Delta_k) = m_k h_k^{1/p}$. Разделим сегмент Δ_k на $n_k = [(m_k)^{p/(rp-1)}] + 1$ ($[\alpha]-$ антье α) равных частей. Сегменты, полученные в результате разбиения сегмента Δ_k, обозначим через $\Delta_{k,j} = [w_{kj}, w_{k,j+1}]$, где $w_{kj} = w_k + j(w_{k+1} - w_k)/n_k$,
$j = 0, 1, \ldots, n_k$.

На каждом сегменте разбиения Δ_{kj} функция $\varphi(t)$ аппроксимируется отрезком ряда Тейлора $T_{r-1}(\varphi, \Delta_{kj}, c_{kj})$, где $c_{kj} = w_{kj}$ или $c_{kj} =$
$= w_{k,j+1}$ в зависимости от того, находится Δ_{kj} в $[-1, 0]$ или в $[0, 1]$. Тогда погрешность на каждом участке разбиения не превосходит величины $A(h_k/n_k)^{r-1/p} h_k^{1/p} m_k \le A N^{-r}$.

Покажем, что $\sum\limits_{k=0}^{N-1} n_k \le AN$. В самом деле,

$$\sum_{k=0}^{N-1} m_k^p h_k = \sum_{k=0}^{N-1} \psi_k^p(\Delta_k) = \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{\Delta_k} \left|\varphi^{(r)}(\tau)\right|^p d\tau \le 1.$$

Воспользовавшись неравенством Гельдера с $q = 1/(rp-1)$ и $q' =$
$= 1/(2-rp) \quad (r > 2/p)$, имеем

$$1 \ge \sum_{k=0}^{N-1} m_k^p h_k \ge \left(\sum_{k=0}^{N-1} (m_k)^{p/(rp-1)}\right)^{rp-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} (h_k)^{1/(2-rp)}\right)^{2-rp} \ge$$

$$\ge \left(\sum_{k=0}^{N-1} (m_k)^{p/(rp-1)}\right)^{rp-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{N}{2}\right)^{1/(rp-2)}\right)^{2-rp} \ge$$

$$\ge \left(\sum_{k=0}^{N-1} (m_k)^{p/(rp-1)}\right)^{rp-1} \frac{2}{N^{rp-1}}.$$

Отсюда

$$\sum_{k=0}^{N-1} n_k \le \sum_{k=0}^{N-1} (m_k)^{p/(rp-1)} + N \le 2N.$$

Следовательно, добавляя не более чем $2N$ узлов, имеем погрешности аппроксимации, не превосходящей AN^{-r}.

Для простоты описания приводимой ниже к.ф. введем следующие обозначения. Если сегмент Δ_k не делится на более мелкие сегменты $\Delta_{k,j}$, то наряду с обозначением $\Delta_k = [w_k, w_{k+1}]$ будем пользоваться обозначением $\Delta_k = [w_{k,0}, w_{k,1}]$. Кроме того, положим $w_{k,-1} =$
$= w_{k-1,n_{k-1}-1}, w_{k,n_k+1} = w_{k+1,1}$.

Пусть $t \in [w_{i,j}, w_{i,j+1}]$ при $(i,j) \ne (0,0)$, $(N-1, n_{N-1}-1)$. Если $(i,j) = (0,0)$, то полагаем, что $t \in (-1, w_{0,1})$. Если $t \in \Delta_{N-1,n_{N-1}-1}$, то $t \in (w_{N-1,n_{N-1}-1}, 1)$. Интеграл $K\varphi$ при данной функции $\varphi(t)$ вычисляется по формуле

$$K\varphi = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{n_k-1}{}' \int\limits_{\Delta_{k,l}} \frac{T_{r-1}(\varphi, \Delta_{kl}, c_{kl})}{\tau - t} d\tau +$$

$$+ \int\limits_{w_{i,j-1}}^{w_{i,j+2}} \frac{T_{r-1}(\varphi, [w_{i,j-1}, w_{i,j+2}], c^*_{i,j-1})}{\tau - t} d\tau + R_N(\varphi),$$

где $\sum\sum'$ означает суммирование по $(k,l) \ne (i,j-1), (i,j), (i,j+1)$, $c^*_{i,j-1} = w_{i,j-1}$ при $w_{i,j-1} \le 0$ и $c^*_{i,j-1} = w_{i,j+2}$ при $w_{i,j+2} > 0$.

Оценим погрешность этой формулы. Рассмотрим случай, когда $t \in [w_{0,i}, w_{0,i+1})$ при $i \ne 0$ (или $t \in (w_{0,i}, w_{0,i+1})$ при $i = 0$.) Остальные случаи рассматриваются аналогично. Нетрудно видеть, что

$$|R_N(\varphi)| \le \sum_l{}' \left| \int\limits_{w_{0,l}}^{w_{0,l+1}} \frac{\psi_N(\tau, \Delta_{0l}, c_{0,l})}{\tau - t} d\tau \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{w_{0,i-1}}^{w_{0,i+2}} \frac{\psi_N(\tau, [w_{0,i-1}, w_{0,i+2}], c^*_{0,i})}{\tau - t} d\tau \right| +$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{l}\left|\int\limits_{w_{k,l}}^{w_{k,l+1}}\frac{\psi_N(\tau,\Delta_{kl},c_{kl})}{\tau-t}d\tau\right|=r_1+r_2+r_3,$$

где $\psi_N(t,\Delta_{kl},c_{kl})=\varphi(t)-T_{r-1}(\varphi,\Delta_{kl},c_{kl})$, $\sum'$ означает суммирование по $l\neq i-1,i,i+1$. Ниже используется обозначение $\psi_N(t),-1\leq t\leq 1$, где $\psi_N(t)=\psi_N(t,\Delta_{kl},c_{kl})$ при $t\in\Delta_{kl}$.

Оценим выражения r_1-r_3 в отдельности

$$r_1=\sum_{l}{}'\left|\int\limits_{w_{0,1}}^{w_{0,l+1}}\frac{\psi_N(\tau)d\tau}{\tau-t}d\tau\right|\leq\left(\sum_{l=0}^{i-2}+\sum_{l=i+2}^{n_0-1}\right)\int\limits_{w_{0,l}}^{w_{0,l+1}}\left|\frac{\psi_N(\tau)}{\tau-t}\right|d\tau\leq$$

$$\leq\frac{A}{N^r}\left(\sum_{l=0}^{i-2}\frac{h}{(i-l-1)h}+\sum_{l=i+2}^{n_0-1}\frac{h}{(l-i-1)h}\right)\leq\frac{A\ln N}{N^r},$$

где $h=h_0/n_0$;

$$r_2=\left|\int\limits_{w_{o,i-1}}^{w_{0,i+2}}\frac{\psi_N(\tau)}{\tau-t}d\tau\right|\leq\left|\int\limits_{w_{0,i-1}}^{t-h}\frac{\psi_N(\tau)}{\tau-t}d\tau\right|+\left|\int\limits_{t-h}^{t+h}\frac{\psi_N(\tau)}{\tau-t}d\tau\right|=r_2^1+r_2^2.$$

Здесь $h=w_{0,i+2}-t$. Случай, когда $h=t-w_{0,i-1}$, рассматривается аналогично.

Оценим интегралы r_2^1 и r_2^2 :

$$r_2^1\leq A\left(\frac{h_0}{n_0}\right)^{r-1/p}m_0h_0^{1/p}\ln\left|\frac{h}{w_{o,i-1}-t}\right|\leq\frac{A\ln 2}{N^r}\leq\frac{A}{N^r};$$

$$r_2^2=\frac{1}{(r-1)!}\left|\int\limits_{t-h}^{t+h}\left(\int\limits_0^{\tau}(\tau-v)^{r-1}\varphi^{(r)}(v)dv-\int\limits_0^{t}(t-v)^{r-1}\varphi^{(r)}dv\right)\frac{1}{\tau-t}d\tau\right|\leq$$

$$\leq A\left[\left|\int\limits_{t-h}^{t+h}\left(\int\limits_t^{\tau}(\tau-v)^{r-1}\varphi^{(r)}(v)dv\right)\frac{1}{\tau-t}d\tau\right|+\right.$$

$$\left.+\left|\int\limits_{t-h}^{t+h}\left(\int\limits_0^{t}\left((\tau-v)^{r-1}-(t-v)^{r-1}\right)\varphi^{(r)}(v)dv\right)\frac{1}{\tau-t}d\tau\right|\right]\leq AN^{-r}.$$

Здесь предполагалось, что $t \le \tau$. Случай, когда $t > \tau$, рассматривается аналогично.

В отдельности рассмотрим случай, когда $t \in (w_{0,0}, w_{0,1})$. В этом случае $h = t - w_{0,0}$ и

$$r_2 = \left| \int\limits_{w_{0,0}}^{w_{0,2}} \frac{\psi_N(\tau)}{\tau - t} d\tau \right| \le \left| \int\limits_{w_{0,0}}^{t+h} \frac{\psi_N(\tau)}{\tau - t} d\tau \right| + \left| \int\limits_{t+h}^{w_{0,2}} \frac{\psi_N(\tau)}{\tau - t} d\tau \right| = r_2^3 + r_2^4.$$

Интеграл r_2^3 оценивается точно так же, как был оценен интеграл r_2^2. Остановимся на оценке интеграла r_2^4 :

$$r_2^4 \le \sum_{k=1}^{[2/Nn_0h]} \int\limits_{t+kh}^{t+(k+1)h} \left. \frac{\psi_N(\tau)}{\tau - t} \right| d\tau \le$$

$$\le \frac{1}{(r-1)!} \sum_{k=1}^{[2/Nn_0h]} \int\limits_{t+kh}^{t+(k+1)h} \left| \left(\int\limits_0^{\tau} (\tau - v)^{r-1} \varphi^{(r)}(v) dv \right) \frac{1}{\tau - t} \right| d\tau \le$$

$$\le A \sum_{k=1}^{[2/Nn_0h]} h^{r-1/p} k^{r-1-1/p} m_0 h_0^{1/p} \le AN^{-r}.$$

Осталось оценить r_3

$$r_3 = \sum_{k=1}^{N-1} \left| \int\limits_{w_{k,0}}^{w_{k+1,0}} \frac{\psi_N(\tau)}{\tau - t} d\tau \right| \le A \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{N^r k} \le AN^{-r} \ln N.$$

Собирая оценки $r_1 - r_3$, убеждаемся в справедливости теоремы 1.1.

2. Адаптивные алгоритмы вычисления многомерных сингулярных интегралов

Рассмотрим сингулярный интеграл

$$M\varphi = \int\limits_D \frac{f(\theta)\varphi(\tau)}{(r(\tau, t))^l} d\tau,$$

где $D=[0,1]^l,\ l\geq 2,\ t=(t_1,\ldots,t_l),\ \tau=(\tau_1,\ldots,\tau_l),\ \theta=(t-\tau)/r(\tau,t)$, $r(t,\tau)=\left[\sum_{k=1}^{l}(t_k-\tau_k)^2\right]^{1/2}$, на соболевском классе функций $W_p^r(D)$.

Задача построения адаптивного алгоритма заключается в следующем. Область D последовательно разбивается на более мелкие области Δ_{kl}. В каждой области разбиения интеграл вычисляется по одной и той же кубатурной формуле. Необходимо построить алгоритм последовательного разбиения области D на более мелкие области так, чтобы в результате применения этой кубатурной формулы к интегралам по каждой из областей разбиения (при произвольном $t\in D$) погрешности вычислений имели бы один и тот же порядок.

Теорема 2.1. Пусть $\varphi\in W_p^r(D),\ 1<p<\infty,\ D=[0,1]^l,\ p(r+l)>$ $>2l$. Существует адаптивный алгоритм вычисления интеграла $M\varphi$ на классе $W_p^r(D)$, использующий (Nl) значений функции φ и имеющий погрешность $AN^{-r}\ln N$.

Доказательство. Для простоты ограничимся случаем, когда $l=$ $=2$. Разобьем область D на более мелкие области: $\Delta_{kl}=[t_k,t_{k+1};t_l,t_{l+1}]$, где $t_k=2k\pi/N,\ k=0,1,\ldots,N$.

Обозначим через $P_r(\varphi,[-1,1])$ интерполяционный полином степени $r-1$, построенный по r равноотстоящим узлам $t_k=-1+$ $+k/(r-1)$, $k=0,1,\ldots,r-1$. Через $P_r(\varphi,[a,b])$ обозначим интерполяционный полином, полученный из $P_r(\varphi,[-1,1])$ при отображении сегмента $[-1,1]$ на $[a,b]$. Через $P_r(\varphi,\Delta_{kl})$ обозначим интерполяционный полином $P_r(\varphi,\Delta_{kl})=P_r^{x_1}P_r^{x_2}(\varphi,\Delta_{kl})$, где верхний индекс x_j означает переменную, по которой проводится интерполяция.

Для оценки погрешности аппроксимации функций $\varphi\in W_p^r(D)$ на кубах Δ_{kl} интерполяционными полиномами $P_r(\varphi,\Delta_{kl})$ воспользуемся леммами 3.4 и 3.5, приведенными в разд. 3 главы 1.

Обозначим через $P_{\Delta_{kl}}(\varphi,\Delta_{kl})$, описанный в леммах 3. 4 и 3.5 интерполяционный полином степени r. Тогда

$$\|\varphi(t)-P_r(\varphi,\Delta_{kl})\|_C\leq$$

$$\leq\|\varphi(t)-P_{\Delta_{kl}}(\varphi,\Delta_{kl})\|_C+\|P_r(\varphi-P_{\Delta_{kl}}(\varphi,\Delta_{kl}),\Delta_{kl})\|_C\leq$$

$$\leq A(1+\ln^2 r)(\mathrm{mes}\Delta_{\mathrm{kl}})^{\mathrm{r}/2-1/\mathrm{p}}\|\varphi\|_{\mathrm{L_p^r}(\Delta_{\mathrm{kl}})}\leq \mathrm{A}\ln^2\mathrm{r}\mathrm{h}_{\mathrm{kl}}^{\mathrm{r}-2/\mathrm{p}}\|\varphi\|_{\mathrm{L_p^r}(\Delta_{\mathrm{kl}})},$$

где $h_{kl}-$ длина стороны квадрата Δ_{kl}.

Аппроксимируем функцию $\varphi(x)$ в кубах Δ_{kl} полиномом $P_r(\varphi, \Delta_{kl})$. Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{\Delta_{kl}} |\varphi(t) - P_r(\varphi, \Delta_{kl})|\, dt \le A(h^2)^{r/2+1/p^*} \|\varphi\|_{L_p^r(\Delta_{kl})} \le$$

$$\le A\left(\frac{1}{N}\right)^{2(r/2+1/p')} \|\varphi\|_{L_p^r(\Delta_{kl})} \le A\left(\frac{1}{N}\right)^{r+2/p'} \|\varphi\|_{L_p^r(\Delta_{kl})} \le$$

$$\le A\left(\frac{1}{N}\right)^{r+2/p'} \psi(\Delta_{kl}),$$

где $1/p + 1/p' = 1, h = 1/N,\ \psi(\Delta_{kl}) = \|\varphi\|_{L_p^r(\Delta_{kl})}$.

Пусть $\psi(\Delta_{kl}) = m_{kl}(1/N)^{2/p}$.

Рассмотрим две возможности: 1) $m_{kl} \le 1$, 2) $m_{kl} > 1$.

В первом случае

$$\int\limits_{\Delta_{kl}} |\varphi(t) - P_r(\varphi\Delta_{kl})|\, dt \le A\left(\frac{1}{N}\right)^{r+2}.$$

Во втором случае разделим каждую из сторон куба Δ_{kl} на $n_{kl} = [m_{kl}^{p'/(rp'+2)}] + 1$ равных частей. В полученных в результате разбиения кубах, которые обозначим через $\Delta_{kl,ij}$, будем вычислять интеграл по формуле

$$\int\limits_{\Delta_{kl,ij}} \varphi(t)dt = \int\limits_{\Delta_{kl,ij}} P_r(\varphi, \Delta_{kl,ij})dt + R(\varphi, \Delta_{kl,ij}),$$

погрешность которой оценивается неравенством

$$|R(\varphi, \Delta_{kl,ij})| \le A(h/n_{kl})^{(rp^*+2)/p^*} m_{kl}(1/N)^{2/p} = A(1/N)^r.$$

Оценим величину $\sum\limits_{kl} n_{kl}^2$, полагая, что в кубах, в которых $m_{kl} \le 1$, величина m_{kl} равна единице.

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{kl} m_{kl}^p h^2 = \sum_{kl} \varphi(\Delta_{kl})^p = \sum_{kl} \sum_{|\alpha|=r} \int\limits_{\Delta_{kl}} |D^\alpha \varphi|^p dt = \sum_{|\alpha|=r} \int\limits_{D} |D^\alpha \varphi|^p dt \le 1.$$

Воспользовавшись неравенством Гельдера с $q = 2p'/((rp'+2)p)$ и $q' = 2/(4-p(r+2))$, имеем

$$1 \geq h^2 \sum_{kl} m_{kl}^p \geq h^2 \left(\sum_{kl} m_{kl}^{2p'/(rp'+2)} \right)^{(rp'+2)p/2p'} N^{(4-p(r+2))} =$$

$$= AN^{-2} \left(\sum_{kl} n_{kl}^2 \right)^{(rp'+2)p/(2p')} N^{4-p(r+2)} = AN^{2-p(r+2)} \left(\sum_{kl} n_{kl}^2 \right)^{(rp'+2)p/(2p')}.$$

Отсюда

$$n^* = \sum_{kl} n_{kl}^2 \leq AN^{(p(r+2)-2)2p'/((rp'+2)p)} = AN^2.$$

Таким образом, добавляя не более AN^2 новых квадратов, добиваемся того, чтобы погрешность вычисления интеграла $\int\limits_{\Delta_{kl,ij}} \int \varphi(t)dt$ в каждом кубе $\Delta_{kl,ij}$ была не меньше AN^{-r-2}.

В результате описанных действий квадрат D оказался разбит на более мелкие квадраты $\Delta_{kl,ij}$ (причем, если квадрат Δ_{kl} не разбивается на более мелкие, то он обозначается через $\Delta_{kl,00}$). Пусть $(t_1, t_2) \in$ $\in \Delta_{kl,ij}$. Построим адаптивный алгоритм вычисления сингулярного интеграла. При этом необходимо рассмотреть несколько возможностей.

Предположим вначале, что квадрат $\Delta_{kl,ij}$ является внутренним для квадрата Δ_{kl}, т.е. не пересекается с его границей. Обозначим через Δ_0 квадрат, который является объединением соприкасающихся с $\Delta_{kl,ij}$ квадратов

$$\Delta_0 = \bigcup_{v=i-1,i,i+1;w=j-1,j,j+1} \Delta_{kl,vw}$$

Функция φ в квадрате Δ_0 аппроксимируется полиномом $P_{3r-3}(\varphi, \Delta_0)$, в остальных квадратах $\Delta_{kl,ij}$ эта функция аппроксимируется полиномами $P_r(\varphi, \Delta_{kl,ij})$. Сплайн, полученный в результате такой аппроксимации, обозначим через $\varphi_r(t_1, t_2)$. Сингулярный интеграл вычисляется по формуле

$$\int\limits_D f(\theta) \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2)}{r^2(\tau, t)} d\tau_1 d\tau_2 = \int\limits_D \int \frac{f(\theta)\varphi_r(\tau_1, \tau_2)}{r^2(\tau, t)} d\tau_1 d\tau_2 + R_r(\varphi). \qquad (2.1)$$

Пусть теперь пересечение границы области $\Delta_{kl,ij}$ с границей квадрата Δ_{kl} не пусто. Здесь также возникает несколько случаев, которые поясняются рисунками. Рассмотрим вначале ситуацию, представленную на рис. 2.1. В этом случае образуется область Δ_0 аффинным преобразованием области $\Delta_{kl,ij}$ с центром преобразования в точке пересечения диагоналей квадрата $\Delta_{kl,ij}$. Через $\Delta^*_{rs,vw}$ обозначаются области, являющиеся пересечением областей $\Delta_{rs,vw}$ с дополнением Δ_0. В области Δ_0 аппроксимация функции осуществляется сплайном $P_r(\varphi, \Delta_0)$, который строится следующим образом. В прямоугольнике $\Delta(A_1A_2A_9A_{10})$ функция $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ аппроксимируется полиномом $P_r(\varphi, \Delta(A_1A_2A_9A_{10}))$. В квадрате $\Delta(A_2A_3B_2B_1)$ функция $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ аппроксимируется полиномом $P_r(\bar{\varphi}, \Delta(A_1A_2B_2B_1))$, где $\bar{\varphi}(\tau_1, \tau_2)-$ функция, равная $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ во всем квадрате $\Delta(A_1A_2B_2B_1)$ за исключением стороны A_2B_1, на которой она принимает значения равные значениям полинома $P_r(\varphi, \Delta(A_1A_2A_9A_{10}))$ на этой прямой. В квадрате $\Delta(B_1B_2B_3B_4)$ функция $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ аппроксимируется полиномом $P_r(\bar{\varphi}, \Delta(B_1B_2B_3B_4))$, где $\bar{\varphi}(\tau_1, \tau_2)$ в квадрате $\Delta(B_1B_2B_3B_4)$ совпадает с $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ всюду, за исключением сторон B_1B_2 и B_2B_4. На стороне B_1B_2 значения функции $\bar{\varphi}(\tau_1, \tau_2)$ совпадают со значениями полинома $P_r(\bar{\varphi}, \Delta(B_1B_2B_3B_4))$, а на стороне A_2B_4 значения функции $\bar{\varphi}(\tau_1, \tau_2)$ совпадают со значениями полинома $P_r(\varphi, \Delta(A_1A_2A_9A_{10}))$. Аналогичным образом строятся интерполяционные полиномы во всех квадратах, входящих в прямоугольник Δ_0. Объединяя построенные в области Δ_0 интерполяционные полиномы, получаем локальный сплайн $P^*_r(\varphi, \Delta_0)$. В целом в квадрате D аппроксимация осуществляется сплайном $\varphi_r(\tau_1, \tau_2)$, определяемым формулой

$$\varphi_r(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} P^*_r(\varphi, \Delta_0) & (\tau_1, \tau_2) \in \Delta_0; \\ P_r(\varphi, \Delta_{kl,ij}) & (\tau_1, \tau_2) \in \Delta^*_{kl,ij}. \end{cases}$$

Сингулярный интеграл вычисляется по формуле (2.1).

Следующая ситуация представлена на рис. 2.2. В этом случае образуется прямоугольник Δ_0, построение которого легко проследить по рис. 2.2. Единственное требование, которое необходимо соблюдать при построении прямоугольника Δ_0, заключается в том, что расстояние от точки (t_1, t_2) до сторон прямоугольника Δ_0 должны быть не меньше длины стороны квадрата $\Delta_{k,l-1,ij}$. Пересечение квадратов $\Delta_{rs,vw}$ с дополнением Δ_0 до квадрата D обозначим через $\Delta^*_{rs,vw}$. Введем сплайн $\varphi_r(t_1, t_2)$

формулой

$$\varphi_r(\tau_1,\tau_2)=\begin{cases} P_r^*(\varphi,\Delta_0) & (\tau_1,\tau_2)\in\Delta_0;\\ P_r(\varphi,\Delta_{kl,ij}) & (\tau_1,\tau_2)\in\Delta^*_{kl,ij}.\end{cases}$$

Сингулярный интеграл $K\varphi$ вычисляется по формуле (2.1)

Третья ситуация представлена на рис. 2.3. Области $\Delta_{k-1,l},\Delta_{k-1,l-1}$, $\Delta_{k,l},\Delta_{k,l-1}$ делятся на более мелкие квадраты $\Delta_{k-1,l,i,j}$ и т.д. в соответствии с алгоритмом аппроксимации функции φ. Из четырех типов квадратов $\Delta_{k-1,l-1,ij},\Delta_{k,l-1,ij},\Delta_{kl,ij},\Delta_{k-1,l,i,j}$ выбирается тот, у которого наименьшая длина стороны. Обозначим ее через h. Области $\Delta_{k-1,l},\Delta_{k-1,l-1},\Delta_{k,l},\Delta_{k,l-1}$ покрываются квадратами со сторонами, равными h. За этими квадратами сохраняются прежние обозначения. Построим квадрат Δ_0 с центром в точке (t_1,t_2) и длиной стороны, равной $2h$. Через $\Delta^*_{rs,vw}$ обозначим пересечение $\Delta_{rs,vw}$ с дополнением Δ_0 до D. В области Δ_0 построим локальный сплайн $P_r^*(\varphi,\Delta_0)$ описанным выше способом.

Введем сплайн $\varphi(\tau_1,\tau_2)$ формулой

$$\varphi_r(\tau_1,\tau_2)=\begin{cases} P_r^*(\varphi,\Delta_0) & (\tau_1,\tau_2)\in\Delta_0;\\ P_r(\varphi,\Delta_{kl,ij}) & (\tau_1,\tau_2)\in\Delta^*_{kl,ij}.\end{cases}$$

.

Сингулярный интеграл вычисляется по формуле (2.1).

Теперь приступим к оценке погрешности кубатурной формулы (2.1). Так как ситуация, представленная на рис. 2.3, наиболее общая, то остановимся на ней.

Пусть $(t_1, t_2) \in \Delta_{ij}$. Нетрудно видеть, что погрешность кубатурной формулы (2.1) имеет вид

$$|R_r(\varphi)| \le r_1 + \dots + r_{14} = \left| \int\limits_{\Delta_0} \int \frac{f(\theta)\psi_r(\tau_1,\tau_2)}{r^2(\tau,t)} d\tau_1 d\tau_2 \right| +$$

$$+ \sum_{k=0}^{i-2} \sum_{l=0}^{N-1} \left| \int\limits_{\Delta_{kl}} \int \frac{f(\theta)\psi_r(\tau_1,\tau_2)}{r^2(\tau,t)} d\tau_1 d\tau_2 \right| +$$

$$+ \sum_{k=i-2}^{i+1} \sum_{l=0}^{j-1} \left| \int\limits_{\Delta_{kl}} \int \frac{f(\theta)\psi_r(\tau_1,\tau_2)}{r^2(\tau,t)} d\tau_1 d\tau_2 \right| +$$

$$+ \sum_{k=i+2}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \left| \int\limits_{\Delta_{kl}} \int \frac{f(\theta)\psi_r(\tau_1,\tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{r^2(\tau,t)} \right| +$$

$$+ \sum_{k=i-2}^{i+1} \sum_{l=j+1}^{N-1} \left| \int\limits_{\Delta_{kl}} \int \frac{f(\theta)\psi_r(\tau_1,\tau_2)}{r^2(\tau,t)} d\tau_1 d\tau_2 \right| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{l=1}^{M-1} \left[\left| \int\limits_{\Delta^*_{i-1,j-1,kl}} \int \frac{f(\theta)\psi_r(\tau_1,\tau_2)}{r^2(\tau,t)} d\tau_1 d\tau_2 \right| + \right.$$

$$+ \left| \int\limits_{\Delta^*_{i-1,j,kl}} \int \frac{f(\theta)\psi_r(\tau_1,\tau_2)}{r^2(\tau,t)} d\tau_1 d\tau_2 \right| +$$

$$\left. + \left| \int\limits_{\Delta^*_{i-1,j+1,kl}} \int f(\theta) \frac{\psi_r(\tau_1,\tau_2)}{r^2(\tau,t)} d\tau_1 d\tau_2 \right| + \dots + \left| \int\limits_{\Delta^*_{i+1,j+1,kl}} \int f(\theta) \frac{\psi_r(\tau_1,\tau_2)}{r^2(\tau,t)} d\tau_1 d\tau_2 \right| \right],$$

где $M = [1/Nh] + 1$, $\psi_r(t_1, t_2) = \varphi(t_1, t_2) - \varphi_r(t_1, t_2)$. Из предыдущих выкладок ясно, что $M \le AN$.

Оценим погрешность выражений r_1, r_2, r_6, так как суммы r_2 и r_6 оцениваются так же, как и остальные слагаемые групп $(r_2 - r_5)$ и $(r_6 - r_{14})$, представителями которых они являются.

Нетрудно видеть, что

$$r_2 = \sum_{k=0}^{i-2} \sum_{l=0}^{N-1} \left| \int\limits_{\Delta_{kl}} \int f(\theta) \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) - \varphi_r(\tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2} d\tau_1 d\tau_2 \right| \leq$$

$$\leq \frac{A}{N^r} \sum_{k=0}^{i-2} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{(k+1)^2 + (l+1)^2} \leq AN^{-r} \ln N.$$

Приступим к оценке третьей группы слагаемых:

$$r_6 = \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{M-1} \left| \int\limits_{\Delta_{kl,ij}} \int f(\theta) \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) - \varphi_r(\tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2} d\tau_1 d\tau_2 \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{M-1} \frac{1}{N^r} \frac{1}{(i+1)^2 + (j+1)^2} \leq \frac{A}{N^r} \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{M-1} \frac{1}{i^2 + j^2} \leq$$

$$\leq AN^{-r} \ln N.$$

Приступим к оценке интеграла r_1 :

$$r_1 = \left| \int\limits_{\Delta_0} \int f(\theta) \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) - \varphi_r(\tau_1, \tau_2)}{r^2(\tau, t)} d\tau_1 d\tau_2 \right| \leq$$

$$\leq \left| \int \int\limits_{\Delta_0} f(\theta) \frac{(\varphi(\tau_1, \tau_2) - \varphi_r(\tau_1, \tau_2)) - (\varphi(t_1, t_2) - \varphi_r(t_1, t_2))}{r^2(\tau, t)} d\tau_1 d\tau_2 \right| +$$

$$+ |(\varphi(t_1, t_2) - \varphi_r(t_1, t_2))| \left| \int\limits_{\Delta_0} \int \frac{f(\theta)}{r^2(\tau, t)} d\tau_1 d\tau_2 \right| = r_{11} + r_{12}.$$

Так как

$$\left| \int\limits_{\Delta_0} \int \frac{f(\theta)}{r^2(\tau, t)} d\tau_1 d\tau_2 \right| \leq A,$$

то $r_{12} \le AN^{-r}$.

Приступая к оценке r_{11}, заметим, что по теореме А.А.Маркова

$$|\varphi(\tau_1,\tau_2) - \varphi_r(\tau_1,\tau_2) - \varphi(t_1,t_2) + \varphi_r(t_1,t_2)| \le$$
$$\le AN^{-r}h^{-1}(|\tau_1 - t_1| + |\tau_2 - t_2|) \le AN^{-r}r(\tau,t)h^{-1}.$$

Следовательно,

$$r_{11} \le AN^{-r}h^{-1}\int\limits_{\Delta_0}\int |f(\theta)|d\tau_1 d\tau_2 \le AN^{-r}\ln N.$$

Собирая полученные оценки, убеждаемся в справедливости теоремы.

3. Адаптивный алгоритм вычисления полисингулярных интегралов

В данном параграфе исследуются адаптивные алгоритмы вычисления бисингулярных интегралов с ядрами Коши

$$K\varphi = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\gamma_1}\int\limits_{\gamma_2}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)}d\tau_1 d\tau_2 \tag{3.1}$$

и Гильберта

$$F\varphi = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\sigma_1,\sigma_2)\mathrm{ctg}\frac{\sigma_1 - \mathrm{s}_1}{2}\mathrm{ctg}\frac{\sigma_2 - \mathrm{s}_2}{2}\mathrm{d}\sigma_1\mathrm{d}\sigma_2. \tag{3.2}$$

Для простоты обозначений в интеграле (3.1) под γ_i $(i = 1,2)$ будем понимать единичную окружность с центром в начале координат. Так как интегралы (3.1) и (3.2) связаны между собой формулами Гильберта [63], то в дальнейшем ограничимся рассмотрением интеграла (3.1). Будем считать, что функция $\varphi(s_1,s_2) \in W_p^r(D)$, где $r = 1,2,\ldots, 1 < p < \infty, D = \gamma_1 \times \gamma_2$.

Теорема 3.1. Пусть $\varphi(s_1,s_2) \in W_p^r(D),\ r = 1,2,\ldots,\ 1 < p < \infty,\ p(r+2) > 4$. Существует адаптивный алгоритм вычисления интегралов типа $K\varphi$, использующий значения подынтегральной функции $\varphi(t_1,t_2)$ *в* $n = N^2$ узлах и имеющий погрешность

$$R_n(\varphi) \le AN^{-r}\ln^2 N = An^{-r/2}\ln^2 n.$$

Замечание. В главе 4 показано, что верхняя грань оценки снизу погрешности к.ф. вычисления бисингулярного интеграла $K\varphi$ на классе $W_p^r(D),\ 1 < p < \infty$, использующих n значений подынтегральной функции $\varphi(t_1, t_2)$ есть величина, не превосходящая $An^{-r/2+1/p}$. Из сопоставления этой оценки и утверждения теоремы 3.1 следует, что на классе $W_p^r(D)$ адаптивные алгоритмы вычисления полисингулярных интегралов значительно точнее пассивных.

Доказательство. При доказательстве предыдущей теоремы был изложен адаптивный алгоритм такого разбиения квадрата D на более мелкие области Δ_{klij}, чтобы аппроксимация функции $\varphi(t_1, t_2)$ интерполяционным полиномом $P_r(\varphi, \Delta_{klij}) = \varphi_N(t_1, t_2, \Delta_{klij})$ не превосходила величину AN^{-r}.

В результате применения этого алгоритма квадрат D оказался разбит на более мелкие области Δ_{klij}, причем в каждой области Δ_{klij} функция $\varphi(t_1, t_2)$ аппроксимируется полиномом $P_r(\varphi, \Delta_{klij})$ с точностью AN^{-r}. Сплайн, определенный в области $D = \gamma_1 \times \gamma_2$ и состоящий из интерполяционных полиномов $P_r(\varphi, \Delta_{klij})$, и сплайна $P_r^*(\varphi, \Delta_0)$, обозначим через $\varphi_r(t_1, t_2)$.

Полисингулярный интеграл $K\varphi$ будем вычислять по формуле

$$K\varphi = \frac{1}{4\pi^2}\left[\int\limits_{\gamma_1}\int\limits_{\gamma_2} \frac{\varphi_r(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1 + \overline{n}_1 h)(\tau_2 - t_2 + \overline{n}_2 h)} + \right.$$

$$+ \int\limits_{\gamma_1}\int\limits_{\gamma_2} \frac{\varphi_r(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1 - \overline{n}_1 h)(\tau_2 - t_2 + \overline{n}_2 h)} +$$

$$+ \int\limits_{\gamma_1}\int\limits_{\gamma_2} \frac{\varphi_r(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2)}{(\tau_1 - t_1 + \overline{n}_1 h)(\tau_2 - t_2 - \overline{n}_2 h)} +$$

$$\left. + \int\limits_{\gamma_1}\int\limits_{\gamma_2} \frac{\varphi_r(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1 - \overline{n}_1 h)(\tau_2 - t_2 - \overline{n}_2 h)}\right] + R_N(\varphi), \qquad (3.3)$$

где $h = N^{-r}, \overline{n}_i-$ единичная нормаль, проведенная в точке t_i внутрь окружности $\gamma_i, i = 1, 2$.

Оценим погрешность формулы (3.3). Нетрудно видеть, что

$$|R_N(\varphi)| \le \left| \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{\gamma_1} \int\limits_{\gamma_2} \varphi(\tau_1, \tau_2) \left(\frac{1}{(\tau_1 - t_1 + \overline{n}_1 h)(\tau_2 - t_2 + \overline{n}_2 h)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} \right) d\tau_1 d\tau_2 \right| + \left| \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{\gamma_1} \int\limits_{\gamma_2} \frac{(\varphi(\tau_1, \tau_2) - \varphi_r(\tau_1, \tau_2)) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1 + \overline{n}_1 h)(\tau_2 - t_2 + \overline{n}_2 h)} \right| =$$

$$= r_1 + r_2.$$

Интеграл r_1 был оценен в [40], где показано, что $r_1 \le Ah = AN^{-r}$.

Перейдем к оценке интеграла r_2. Предположим, что точка $(t_1, t_2) \in \in \Delta_{kl}$. Тогда

$$r_2 \le \frac{1}{\pi^2} \left| \int\int\limits_{d_0} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) - \varphi_r(\tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1 + \overline{n}_1 h)(\tau_2 - t_2 + \overline{n}_2 h)} d\tau_1 d\tau_2 \right| +$$

$$+A \sum_{v_1=1}^{[N/2]-1} \sum_{v_2=1}^{[N/2]-1} \left(\frac{N}{v_1}\right) \left(\frac{N}{v_2}\right) \int\limits_{\Delta_{v_1,v_2}} \int |\varphi(\tau_1, \tau_2) - \varphi_r(\tau_1, \tau_2)||d\tau_1||d\tau_2| +$$

$$+A \sum_{v_1=k-1}^{k+1} \sum_{v_2=1}^{[N/2]-1} \frac{N^2}{v_2} \int\limits_{\Delta_{v_1 v_2}} \int |\varphi(\tau_1, \tau_2) - \varphi_r(\tau_1, \tau_2)||d\tau_1||d\tau_2| \le$$

$$\le AN^{-r} \ln^2 N \le An^{-r/2} \ln^2 n,$$

где $d_0 = \Delta_{k-1,l-1} \cup \Delta_{k-1,l} \cup \Delta_{k-1,l+1} \cup \Delta_{k,l-1} \cup \Delta_{k,l} \cup \Delta_{k,l+1} \cup \cup \Delta_{k+1,l-1} \cup \Delta_{k+1,l} \cup \Delta_{k+1,l+1}$.

Из оценок r_1 и r_2 следует справедливость теоремы.

ГЛАВА 6

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО СЛОЖНОСТИ АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Предыдущие главы были посвящены построению оптимальных по точности методов вычисления сингулярных, полисингулярных и многомерных сингулярных интегралов. Наряду с оценкой точности, оценка сложности вычислений является также одним из критериев, характеризующих эффективность алгоритма. Несмотря на это, вопросы построения оптимальных по сложности методов вычисления сингулярных интегралов к настоящему времени мало исследованы.

В данной главе приведен ряд алгоритмов вычисления сингулярных и полисингулярных интегралов, которые являются одновременно оптимальными по точности и сложности.

1. Оптимальные по сложности алгоритмы вычисления сингулярных интегралов с фиксированной сингулярностью на классе функций Гельдера

В этом параграфе исследуются методы вычисления на классе функций Гельдера H_α, $0 < \alpha \leq 1$ сингулярных интегралов вида

$$I\varphi = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau.$$

Для вычисления используются квадратурные формулы вида

$$I\varphi = \sum_{k=-N}^{N}{}' \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl}\varphi^{(l)}(t_k) + R_N(\varphi), \tag{1.1}$$

где $-1 \leq t_{-N} < \cdots < t_{-1} < 0 < t_1 < \cdots < t_N \leq 1, \sum'$ означает суммирование по $k \neq 0$.

Во второй главе были построены асимптотически оптимальные по точности алгоритмы вычисления сингулярных интегралов с фиксированной сингулярностью. Для построения алгоритмов, одновременно оптимальных и по точности и по сложности, необходимо преобразовать эти формулы.

Рассмотрим квадратурные формулы:

$$I\varphi = \sum_{k=1}^{N-1} (\varphi(t'_k) - \varphi(t'_{-k-1})) \ln(t_{k+1}/t_k) + R_N(\varphi), \tag{1.2}$$

$$I\varphi = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\varphi(t'_k) - \varphi(t'_{-k-1})}{t_k} (t_{k+1} - t_k) + R_N(\varphi). \tag{1.3}$$

$$I\varphi = \frac{1+\alpha}{\alpha} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\varphi(t'_k) - \varphi(t'_{-k-1})}{k} + R_N(\varphi), \tag{1.4}$$

где $t_{\pm k} = \pm(k/N)^{(1+\alpha)/\alpha},\ t'_k = (t_{k+1} + t_k)/2,\ k = 0, 1, \ldots, N-1.$

Теорема 1.1 [36]. Среди к.ф. вида (1.1) при $\rho = 0$ асимптотически оптимальными по точности являются формулы (1.2), (1.3) при $0 < \alpha \leq 1$ и формула (1.4) при $0 < \alpha < 1$. К.ф. (1.4) является оптимальной по порядку по точности при $\alpha = 1$. Квадратурные формулы (1.2) – (1.4) являются оптимальными по порядку по сложности при $0 < \alpha \leq 1$. При этом точность к.ф. (1.2), (1.3) равна

$$R_N[H_\alpha(1)] = (1 + o(1))2^{1-\alpha}(1+\alpha)^\alpha/\alpha^{1+\alpha}N^\alpha,$$

а точность к.ф. (1.4) равна

$$R_N[H_\alpha(1)] = (1 + o(1))2^{1-\alpha}(1+\alpha)^\alpha/(\alpha^{1+\alpha}N^\alpha) + (2 + o(1))(1+\alpha)/\alpha^3 N.$$

Оценка сложности к.ф. (1.2) – (1.4) равна AN, где A– константа, зависящая только от α.

Доказательство теоремы 1.1. Во второй главе была вычислена верхняя грань оценки снизу погрешности к.ф. вида (1.1) на классе $H_\alpha(1)$, равная

$$\zeta_N(H_\alpha(1)) \geq (1 + o(1))(1+\alpha)^\alpha 2^{1-\alpha} \frac{1}{\alpha^{1+\alpha}N^\alpha}.$$

Покажем, что к.ф. (1.2) асимптотически оптимальна. В самом деле,

$$|R_N(\varphi)| \leq \left| \int_{t_{-1}}^{t_1} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(0)}{\tau} d\tau \right| + \sum_{k=-N}^{N}{}'' \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t'_k)}{\tau} d\tau \right| \leq$$

$$\leq (1 + o(1))2^{1-\alpha}(1+\alpha)^\alpha \frac{1}{\alpha^{1+\alpha}N^\alpha}. \tag{1.5}$$

Здесь $\sum''$ означает суммирование по $k \neq -1, 0$.

Из сопоставления оценок $\zeta_N[H_\alpha(1)]$ и оценки (1.5) следует асимптотическая оптимальность по точности к.ф. (1.2).

Покажем, что к.ф. (1.3) асимптотически оптимальна. В самом деле,

$$|R_N| \leq \left| \int\limits_{t_{-1}}^{t_1} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(0)}{\tau} d\tau \right| + \sum_{k=1}^{N-1} \left| \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{\varphi(\tau)}{\tau} - \frac{\varphi(t'_k)}{t_k} \right) d\tau \right| +$$

$$+ \sum_{k=-N}^{-2} \left| \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{\varphi(\tau)}{\tau} - \frac{\varphi(t'_k)}{t_{k+1}} \right) d\tau \right| = r_1 + r_2 + r_3.$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности. Нетрудно видеть, что

$$r_1 = \left| \int\limits_{t_{-1}}^{t_1} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(0)}{\tau} d\tau \right| \leq \frac{2}{\alpha} \frac{1}{N^{1+\alpha}} = o\left(\frac{1}{N^\alpha} \right).$$

При оценке r_2 не ограничивая общности можно считать, что

$$\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau \geq 0.$$

Тогда

$$r_2 = \sum_{k=1}^{N-1} \left| \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{\varphi(\tau)}{\tau} - \frac{\varphi(t'_k)}{t_k} \right) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N-1} \left[\left| \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi^+(\tau)}{t_k} d\tau + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi^-(\tau)}{t_{k+1}} d\tau - \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(t'_k)}{t_k} d\tau \right| \right] \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N-1} \left[\left| \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t'_k)}{t_k} d\tau \right| + \left| \frac{t_{k+1} - t_k}{t_k t_{k+1}} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi^-(\tau) d\tau \right| \right] \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N-1} \left| \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t'_k)}{t_k} d\tau \right| + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{|t_{k+1} - t_k|}{t_k t_{k+1}} \left| \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi^-(\tau) d\tau \right| = r_{21} + r_{22},$$

где

$$\varphi^+(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \varphi(t) \geq 0, \\ 0 & \varphi(t) < 0, \end{cases} \qquad \varphi^-(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \varphi(t) \leq 0, \\ 0 & \varphi(t) > 0. \end{cases}$$

Очевидно,

$$r_{21} = \sum_{k=1}^{N-1} \left| \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t'_k)}{t_k} d\tau \right| \leq$$

$$\leq \frac{2}{1+\alpha} \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{N}{k}\right)^{(1+\alpha)/\alpha} \left(\frac{t_{k+1} - t_k}{2}\right)^{1+\alpha} \leq \frac{(1+o(1))(1+\alpha)^\alpha}{2^\alpha \alpha^{1+\alpha} N^\alpha}.$$

Так как функция $\varphi(t)$ непрерывна, то если на сегменте $[t_k, t_{k+1}]$ функция $\varphi^-(t)$ не равна тождественно нулю, то существует точка $c \in [t_k, t_{k+1}]$ такая, что $\varphi^-(c) = 0$. Тогда

$$r_{22} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{|t_{k+1} - t_k|}{t_k t_{k+1}} \left| \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi^-(\tau) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{|t_{k+1} - t_k|}{t_k t_{k+1}} \left| \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\varphi^-(\tau) - \varphi(c)\right) d\tau \right| \leq \frac{A}{N^{1+\alpha}} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} \leq \frac{A \ln N}{N^{1+\alpha}} = o(N^{-\alpha}).$$

Таким образом,

$$r_2 \leq (1+o(1)) \frac{(1+\alpha)^\alpha}{2^\alpha \alpha^{1+\alpha} N^\alpha}.$$

Сумма r_3 оценивается аналогично. Собирая оценки выражений $r_1 - r_3$, имеем

$$R \leq (1+o(1)) \frac{2^{1-\alpha}(1+\alpha)^\alpha}{\alpha^{1+\alpha} N^\alpha}.$$

Из сопоставления этого неравенства и оценки $\zeta_N[H_\alpha(1)]$ следует асимптотическая оптимальность по точности к.ф. (1.3).

Оценим погрешность к.ф. (1.4). Для этого достаточно оценить разность

$$\left| \sum_{k=1}^{N-1} (\varphi(t'_k) - \varphi(0)) \left(\frac{t_{k+1} - t_k}{t_k} - \frac{1+\alpha}{\alpha k} \right) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^{1+\alpha} \left(\frac{(k+1)^{(1+\alpha)/\alpha} - k^{(1+\alpha)/\alpha}}{k^{(1+\alpha)/\alpha}} - \frac{1+\alpha}{\alpha k} \right) \leq$$

$$\leq \frac{1+\alpha}{\alpha N^{1+\alpha}} \sum_{k=1}^{N-1} k^{1+\alpha} \left(\frac{(k+1)^{1/\alpha}}{k^{1/\alpha+1}} - \frac{1}{k} \right) \leq$$

$$\leq \frac{1+\alpha}{\alpha N^{1+\alpha}} \sum_{k=1}^{N-1} k^{\alpha} \left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{1/\alpha} - 1 \right) =$$

$$= \frac{1+\alpha}{\alpha N^{1+\alpha}} \sum_{k=1}^{N-1} k^{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha k} + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{1}{2!}\frac{1}{k^2} + \cdots + \right) \leq$$

$$\leq \frac{1+\alpha}{\alpha^2 N^{1+\alpha}} \left(\sum_{k=1}^{N-1} k^{\alpha-1} - o(1) \right) = \frac{1+\alpha}{\alpha^2 N^{1+\alpha}} \left(\frac{N^{\alpha}}{\alpha} - o(1) \right) = \frac{1+\alpha}{\alpha^3 N} + o(N^{-1}).$$

Из этой оценки следует, что к.ф. (1.4) асимптотически оптимальна при $0 < \alpha < 1$ и оптимальна по порядку при $\alpha = 1$.

Оценим число арифметических действий, необходимых для реализации к.ф. (1.2) – (1.4). В качестве набора простейших операций возьмем набор $P = \{$арифметические операции, вычисление значений функций$\}$.

Выше было показано, что для информационного оператора $\eta_N = (t_{-N}, \ldots t_{-1}, t_1, \ldots, t_N)$

$$\zeta_N[\Psi] \geq (1+o(1))2^{1-\alpha}(1+\alpha)^{\alpha}/(\alpha^{1+\alpha}N^{\alpha}).$$

Из определения функционала $\zeta_N(\Psi)$ следует, что нижняя грань размерности оператора η_N, необходимая для достижения точности ε, определяется из неравенства $\varepsilon > \zeta_N[\Psi]$. Отсюда следует, что $N = A(1/\varepsilon)^{1/\alpha}$, а при $N \to \infty$ $\zeta_N[\Psi] \geq (1+o(1))(2^{1-\alpha}(1+\alpha)^{\alpha}/(\alpha^{1+\alpha}\varepsilon))^{1/\alpha}$.

Для оценки снизу $\mathrm{comp}(\eta_{\mathrm{N}}, \mathrm{I}, \varepsilon)$ заметим, что

$$\mathrm{comp}(\eta_{\mathrm{N}}, \mathrm{I}, \varepsilon) \geq \sum_{\mathrm{i}=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}}{}'(\mathrm{c_i} + \alpha_{\mathrm{i}}) + \mathrm{N}_1,$$

где c_i– сложность вычисления функционала $\varphi(t_i)$; α_i– сложность вычисления коэффициента p_i; N_1– число арифметических действий над $\varphi(t_i)$ и p_i. Очевидно, $c_i \geq 2,\ \alpha_i \geq 0,\ N_1 \geq 2N$. Следовательно, $\mathrm{comp}(\eta_{\mathrm{N}}, \mathrm{I}, \varepsilon) > 6\mathrm{N}$.

Оценим число арифметических действий, при которых возможна реализация к.ф. (1.2). Представим формулу (1.2) в виде

$$I\varphi = \frac{1+\alpha}{\alpha} \sum_{k=1}^{N-1} \left(\varphi(t'_k) - \varphi(t'_{-k-1})\right)\left(\ln(k+1) - \ln k\right) + R_N(\varphi). \qquad (1.6)$$

Для реализации вычислительной схемы (1.6) с точностью

$$(1+o(1))2^{1-\alpha}(1+\alpha)^{\alpha}/\alpha^{1+\alpha}N^{\alpha}$$

необходимо вычислить значения $\ln k$ $(k=2,3,\ldots,N)$ с точностью $N^{-1-\alpha}$.

Известна формула [101]

$$\ln x = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2k+1}, \tag{1.7}$$

справедливая при $x>0$.

Пусть $p_1,p_2,\ldots,p_N-$ простые числа, не превосходящие N. Для вычисления $\ln 2$ и $\ln 3$ по этой формуле с точностью $N^{-1-\alpha}$ требуется

$$\frac{3}{2}[(1+\alpha)\log_3 N]+2 \qquad \frac{3}{2}[(1+\alpha)\log_2 N]+2$$

арифметических действий.

Для вычисления логарифма числа $k(3<k\le N)$, представимого в виде $k=2^v$ или $k=3^v$, достаточно одного умножения.

Для вычисления логарифма числа $k(2<k\le N)$, представимого в виде $k=2^v3^{v_1}$, достаточно одного сложения.

Предположим, что уже вычислены логарифмы всех простых чисел, меньших p_k, и логарифмы всех чисел, не превосходящих N и составленных из произведений различных степеней простых чисел $p_1,p_2,\ldots,p_{k-1}$. Вычисление $\ln p_k$ проведем по формуле

$$\ln p_k = \ln\left((p_k+1)\left(1-\frac{1}{p_k+1}\right)\right) = \ln(p_k+1)+\ln\left(1-\frac{1}{p_k+1}\right).$$

Вычислим $\ln(1-1/(p_k+1))$ по формуле (1.7). Для достижения точности $N^{-1-\alpha}$ в этих вычислениях достаточно положить

$$n=\frac{3}{2}\left[(1+\alpha)\ln_{2p_k+1}N\right]+2=\frac{3}{2}\left[(1+\alpha)\frac{\ln N}{\ln(2p_k+1)}\right]+2.$$

Таким образом, число арифметических действий, необходимых для вычисления $\ln p_k$, равно

$$\frac{3}{2}\left[(1+\alpha)\frac{\ln N}{\ln(2p_k+1)}\right]+2.$$

После вычисления логарифма очередного простого числа p_k вычисляются все числа $n \le N$, представимые в виде $p_1^{v_1} p_2^{v_2} \dots p_k^{v_k}$.

Этот процесс завершается после вычисления логарифмов всех чисел $1 \le n \le N$.

По теореме Чебышева [53, с.326] для числа $\pi(N)$ простых чисел, меньших $N (N \ge 2)$, выполняются неравенства $aN/\ln N \le (\pi(N) \le$
$\le bN/\ln N$.

П.Л.Чебышев показал, что $a \ge 0.921, b \le 1.08$. Позднее было показано, что значения a и b еще более близки к единице.

Следовательно, для вычисления значений $\ln k (k = 2, \dots, N)$ достаточно выполнения M арифметических действий, где

$$M \le (N - aN/\ln N) + \frac{3}{2} \sum_k \left((1+\alpha) \frac{\ln N}{\ln(p_k+1)} + 1 \right) \le$$

$$\le N - \frac{0.921N}{\ln N} + \frac{3}{2}(1+\alpha) \ln N \sum_k \frac{1}{\ln(p_k+1)} + \frac{2.16N}{\ln N} \le$$

$$\le N + \frac{1.139N}{\ln N} + \frac{3}{2}(1+\alpha) \ln N \sum_k \frac{1}{\ln(p_k+1)}.$$

Здесь суммирование проводится по всем простым числам, не превосходящим N.

Известно [53, с.330], что для r-го простого числа p_r справедливы неравенства $cr \ln r < p_r < dr \ln r$, где $c = 1/b, d = 1/a$.

Тогда

$$M \le N + \frac{1.139N}{\ln N} + \frac{3}{2}(1+\alpha) \ln N \sum_{r=2}^{\pi(N)} \frac{1}{\ln(cr \ln r)} \le$$

$$\le (1 + o(1)) \left(N + \frac{3}{2}(1+\alpha) \ln N \sum_{r=1}^{\pi(N)} \frac{1}{\ln r} \right).$$

Оценим интеграл

$$\int_2^{\pi(N)+1} \frac{1}{\ln r} dr = \int_{\ln 2}^{\ln(\pi(N)+1)/2} \frac{e^u}{u} du +$$

$$+\int\limits_{\ln(\pi(N)+1)/2}^{\ln(\pi(N)+1)} \frac{e}{u}du \le \sqrt{\pi(N)+1}\ln\ln(\pi(N)+1)+2(\pi(N)+1).$$

Следовательно, $M \le (1+o(1))N$.

Для реализации формулы (1.6) при заранее вычисленных значениях $\ln k$ $(k=2,\dots,N)$ требуется $4N-2$ арифметических действия.

Еще $3N-1$ арифметическое действие требуется для вычисления узлов t'_k (ниже показано, что для вычисления t_k $(k=1,2,\dots,N)$ достаточно $N+O(1)$ арифметических действий) и $2N-2$ действия требуется для вычисления значений $\varphi(t'_k)$.

Таким образом, при наборе простейших операций P реализация формулы (1.2) требует $10N+O(1)$ арифметических действий. Следовательно, к.ф. (1.2) оптимальна по порядку по сложности.

Оценим сложность к.ф. (1.3). Предварительно представим ее в виде

$$I\varphi = \sum_{k=1}^{N-1}(\varphi(t'_k)-\varphi(t'_{-k-1}))\left(1-\frac{t_k}{t_{k+1}}\right)+R_N(\varphi). \tag{1.8}$$

Вначале вычислим значения $k^{(1+\alpha)/\alpha}$ при $2 \le k \le N$. Если $\alpha=1$, то каждое вычисление требует одного умножения и, следовательно, для вычисления всех значений $k^2, 2 \le k \le N$, требуется $N-1$ умножение.

Пусть $0<\alpha<1$. Легко видеть, что если k не является простым числом $(k=k_1k_2)$, то при известных значениях $k_1^{(1+\alpha)/\alpha}$ и $k_2^{(1+\alpha)/\alpha}$ для вычисления $k^{(1+\alpha)/\alpha}$ требуется одно умножение. Оценим теперь число арифметических действий, необходимых для вычисления $p_k^{(1+\alpha)/\alpha}$, когда p_k- простое число. Пусть уже вычислены значения $p_1^{(1+\alpha)/\alpha},\dots,$ $p_{k-1}^{(1+\alpha)/\alpha}$ и все числа, представимые в виде

$$\left(p_1^{(1+\alpha)/\alpha}\right)^{v_1}\times\dots\times\left(p_{k-1}^{(1+\alpha)/\alpha}\right)^{v_{k-1}}$$

и не превосходящие N. Представим число $p_k^{(1+\alpha)/\alpha}$ в виде

$$p_k^{(1+\alpha)/\alpha}=(p_k+1)^{(1+\alpha)/\alpha}\left(1-\frac{1}{p_k+1}\right)^{(1+\alpha)/\alpha}.$$

Воспользовавшись формулой Тейлора для вычисления $\left(1-\frac{1}{p_k+1}\right)^{(1+\alpha)/\alpha}$, убеждаемся, что при $n>(1+\alpha)/\alpha$ для вычисления

$p_k^{(1+\alpha)/\alpha}$ с точностью $N^{-1-\alpha}$ требуется $n = [(1+\alpha)\log_{p_k+1} N]+1$ слагаемых в разложении $\left(1 - \dfrac{1}{p_k+1}\right)^{(1+\alpha)/\alpha}$ в степенной ряд. Учитывая, что k член разложения имеет вид

$$\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{1+\alpha}{\alpha} - 1\right) \times \cdots \times \left(\frac{1+\alpha}{\alpha} - k + 1\right)\frac{1}{k!(p_k+1)^k},$$

легко подсчитываем, что для вычисления k члена разложения требуется 4 арифметических действия. Следовательно, для вычисления $p_k^{(1+\alpha)/\alpha}$ с точностью $N^{-1-\alpha}$ требуется

$$4\max\left(\left[\frac{1+\alpha}{\alpha}\right], \left[(1+\alpha)\log_{p_k+1} N\right]\right) + 1$$

арифметическое действие.

После вычисления значения p_k вычисляются все числа, не превосходящие N и представимые в виде $p_1^{v_1} p_2^{v_2} \dots p_k^{v_k}$. Вычисление каждого такого числа требует одного умножения.

Повторяя рассуждения, проведенные при определении сложности к.ф. (1.2), легко показать, что число арифметических действий, необходимых для вычисления всех чисел $k^{(1+\alpha)/\alpha}$, $k = 2, 3, \dots, N$, по приведенному выше алгоритму оценивается неравенством

$$M \le N + \frac{1.139N}{\ln N} + 4(1+\alpha)\ln N \sum_k \frac{1}{\ln(p_k+1)} \le N + \frac{1.139N}{\ln N} +$$

$$+4(1+\alpha)\ln N\left(\sqrt{\pi(N)+1}\ln\ln(\pi(N)+1) + 2(\pi(N)+1)\frac{1}{\ln\pi(N)}\right) =$$

$$= N + O(1).$$

Для реализации к.ф. (1.8) требуется определить узлы

$$t'_k = (t_{k+1} + t_k)/2 = \left((k+1)^{(1+\alpha)/\alpha} + k^{(1+\alpha)/\alpha}\right)/(2N^{(1+\alpha)/\alpha})$$

при $k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$, что требует $3(N-1)$ арифметических действий. Вычисления выражения $(\varphi(t'_k) - \varphi(t'_{-k-1}))(1 - t_k/t_{k+1})$ требует 4 арифметических действий. Следовательно, сложность формулы (1.8) равна $11N + O(1)$.

Из сопоставления этой оценки с оценкой снизу следует оптимальность по порядку формулы (1.8) и эквивалентной ей формулы (1.3).

Оценим сложность к.ф. (1.4). Для вычисления значений $t_k = k^{(1+\alpha)/\alpha}$, $k = 2, 3, \ldots, N$ требуется, как показано выше, $N + O(1)$ арифметических действий. Для вычисления значений t'_k при $k = 1, \ldots, N-1$ требуется еще $3N - 2$ арифметических действия. Вычисление значений $f(t'_k),\ k = -N, \ldots, -2, 1, \ldots, N-1$ требует $2N-2$ арифметических действий. Непосредственная реализация формулы (1.4) требует $2N-2$ арифметических действий. Таким образом, сложность формулы (1.4) равна $8N + O(1)$ арифметических действий. Из сопоставления оценок снизу и сверху следует оптимальность по порядку по сложности к.ф. (1.4).

Теорема доказана.

2. Оптимальные по сложности алгоритмы вычисления сингулярных интегралов с фиксированной сингулярностью на классе функций $W_p^r(1)$

В этом разделе исследуются квадратурные формулы (1.1) на классе функций $W_p^r(1)$. Учитывая симметричность к.ф. (1.1) и равенство $\int\limits_{-1}^{1} \frac{d\tau}{\tau} = 0$, можно для простоты обозначений ограничиться рассмотрением к.ф. вида

$$I\varphi = \int\limits_0^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl} \varphi^{(l)}(t_k) + R_N(\varphi) \tag{2.1}$$

для функций $\varphi(t) \in W_p^r(1)$, удовлетворяющих дополнительному условию $\varphi(0) = 0$. Этот класс обозначим через $\overline{W}_p^r(1)$.

Теорема 2.1. Пусть $\Psi = \overline{W}_p^r(1) (1 \le p \le \infty)$ и интеграл $I\varphi$ вычисляется по к.ф. вида (2.1). Тогда

$$\zeta_N[\Psi] \ge \left(\frac{rq+1}{rq+1-q} \right)^{r+1/q} \frac{R_{rq}(1)}{2^r r! (rq+1)^{1/q} N^r} + o(N^{-r})$$

при $\rho = r - 1,\ r = 1, 2, \ldots,;$

$$\zeta_N[\Psi] \ge \left(\frac{rq+1}{rq+1-q} \right)^{r+1/q} \frac{\|R_{rq}\|_{L_q}}{r! 2^{r+1/p} N^r} + o(N^{-r})$$

при $\rho = r - 2,\ \rho = r - 3,\ r = 3, 5, \ldots.$

Доказательство теоремы 2.1 приведено в главе 2 для сингулярных интегралов, определенных на сегменте [-1,1].

Интеграл $I\varphi$ будем вычислять по квадратурной формуле

$$I\varphi = \int\limits_0^{t_1^*} \frac{P_L(\varphi, [0, t_1])}{\tau} d\tau +$$

$$+ \sum_{k=1}^{M-1} \int\limits_{t_k^*}^{t_{k+1}^*} \left(\varphi(t_k^*) + \sum_{l=1}^{r-1} \frac{1}{l!} \prod_{n,r,p} \left(\varphi^{(l)}(t_k^*) \right) (\tau - t_k^*)^l \right) \frac{1}{\tau} d\tau +$$

$$+ \sum_{k=1}^{M-2} \left(\frac{N}{kL} \right)^v l_{L,r,p}(\varphi, [t_k^*, t_{k+1}^*]) + \int\limits_{t_{M-1}^*}^{1} \frac{P_L(\varphi, [t_{M-1}^*, 1])}{\tau} d\tau + R_N(\varphi), \quad (2.2)$$

в которой использованы обозначения, введенные в разд. 1 главы 2.

Теорема 2.2. Пусть $\Psi = \overline{W}_p^r(1)$. Среди всевозможных к.ф. вида (2.1) при $\rho = 0$ асимптотически оптимальной по точности является формула (2.2). Погрешность этой формулы равна

$$R_N(\Psi) = \frac{(1 + o(1))}{N^r} \left(\frac{rq + 1}{rq + 1 - q} \right)^{r+1/q} \inf_c \|B_r^*(\cdot) - c\|_{L_q},$$

где B_r^*– полиномы Бернулли r порядка.

Доказательство теоремы 2.2 приведено в главе 2 для сингулярных интегралов, определенных на сегменте $[-1, 1]$.

Теорема 2.3. Пусть $\Psi = \overline{W}_p^r(1),\ 1 \le p \le \infty,\ \eta_N = (\varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_N))$. Квадратурная формула (2.2) является асимптотически оптимальной по сложности и $\mathrm{comp}(\eta_\mathrm{N}, \mathrm{I}, \varepsilon) = 3(1 + \mathrm{o}(1))\mathrm{N}$.

Доказательство. Вычислим оценку снизу сложности к.ф., использующих информационный оператор η_N.

Выше было показано, что для информационного оператора η_N $(\eta_N = (\varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_N)))$

$$\zeta_N[\Psi] \ge \frac{1 + o(1)}{N^r} \left(\frac{rq + 1}{rq + 1 - q} \right)^{r+1/q} \inf_c \|B_r^*(\cdot) - c\|_{L_q}.$$

Из определения функционала $\zeta_N[\Psi]$ следует, что нижняя грань размерности оператора η_N, необходимая для достижения точности ε, определяется из неравенства $\varepsilon > \zeta_N[\Psi]$. Отсюда следует, что размерность

оператора η_N должна быть не меньше $N = (A/\varepsilon)^{1/r}$, а при $N \to \infty$

$$N = (1 + o(1)) \left(\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{rq+1}{rq+1-q} \right)^{r+1/q} \inf_c \|B_r^*(\cdot) - c\|_{L_q[0,1]} \right)^{1/r}.$$

Для оценки снизу $\mathrm{comp}(\eta_\mathrm{N}, \mathrm{I}, \varepsilon)$ заметим, что $\mathrm{comp}(\eta_\mathrm{N}, \mathrm{I}, \varepsilon) \geq \sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} (\mathrm{c_i} + \alpha_\mathrm{i}) + \mathrm{N}_1$, где c_i– сложность вычисления функционала $\varphi(t_i)$; α_i– сложность вычисления коэффициента p_i; N_1– число арифметических действий над $\varphi(t_i)$ и p_i. Очевидно $c_i \geq 2,\ \alpha_i \geq 0,\ N_1 \geq N$. Следовательно, $\mathrm{comp}(\eta, \mathrm{I}, \varepsilon) \geq 3\mathrm{N}$.

Оценим сложность к.ф. (2.2). Повторяя рассуждения, проведенные при оценке сложности к.ф. (1.3), можно показать, что для вычисления значений t_k^* $(k = 1, 2, \ldots, M)$ требуется $(1 + o(1))M$ арифметических действий. Для вычисления узлов к.ф. $l_{L,r,p}(\varphi, [t_k^*, t_{k+1}^*])$ требуется $L + 2r$ арифметических действий для каждого сегмента $[t_k^*, t_{k+1}^*]$. (Отметим, что при построении к.ф. $l_{L,r,p}$ используются, как описано в разд. 3 главы 1, к.ф. Эйлера – Маклорена с равными коэффициентами p_k.) Таким образом, вычисление узлов для всех сегментов $[t_k^*, t_{k+1}^*]$ требует $N + 2Mr$ арифметических действий. Для вычисления функционалов $\prod\limits_{N,r,p} (\varphi^{(l)}(t_k^*))$, $l = 1, 2, \ldots, r$, требуется дополнительно вычислить значения $\varphi(t)$ в r узлах. Вычисление дополнительных узлов потребует $rM = o(N)$ арифметических действий. Вычисление значений функций $\varphi(t)$ в узлах к.ф. (2.2) требует $N + o(N)$ действий из набора P. Нетрудно видеть, что число арифметических действий, которые необходимо выполнить при реализации формулы (2.2), равно $(1 + o(1))N$. Следовательно, сложность вычислений по к.ф. (2.2) равна $3(1 + o(1))N$. Из сопоставления этой оценки с оценкой снизу следует справедливость теоремы.

3. Оптимальные по сложности алгоритмы вычисления сингулярных интегралов с ядром Гильберта

Рассмотрим сингулярный интеграл с ядром Гильберта

$$F\varphi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi(\sigma) \mathrm{ctg} \frac{\sigma - \mathrm{s}}{2} \mathrm{d}\sigma,$$

который будем вычислять по к.ф. вида

$$F\varphi = \sum_{k=1}^{N} \varphi(s_k)p_k(s) + R_N(s, s_k, p_k(s), \varphi) \tag{3.1}$$

с узлами $0 \le s_k \le 2\pi$ и весами $p_k(s),\ k = 1, 2, \ldots, N$.

В третьей главе построены асимптотически оптимальные по точности к.ф. вычисления интегралов вида $F\varphi$. Анализ этих формул показывает, что они не являются одновременно асимптотически оптимальными по сложности. Ниже строятся более сложные в реализации формулы, которые одновременно являются асимптотически оптимальными по точности и сложности.

Для простоты обозначений предположим, что N, L, M, M_1, M_2- целые числа, связанные между собой соотношениями $M = N/L, M_1 = M/L, M_2 = M/2, L = A\ln N, A = \mathrm{const}, 0 < \mathrm{A} < \infty$. Введем обозначения $v_k = 2k\pi/M,\ k = 0, 1, \ldots, M, t_k = 2k\pi/N,\ k = 0, 1, \ldots, N$. Пусть $s \in [v_j, v_{j+1}) \cup [t_i, t_{i+1})$. Рассмотрим квадратурную формулу

$$F\varphi = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{M-1-r} (\varphi(t'_{i+k}) - \varphi(t'_{i-k-1}))\left(\ln\left|\sin\frac{\pi(2k+1)}{2N}\right| - \ln\left|\sin\frac{\pi(2k-1)}{2N}\right|\right) +$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=jL-M}^{jL-M+2r-1}\left(\varphi(t'_k)\left(\ln\left|\sin\frac{\pi(2(k-i)+1)}{2N}\right| - \ln\left|\sin\frac{\pi(2(k-i)-1)}{2N}\right|\right)\right) +$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=M_1}^{M_2-1}\left(\varphi(v'_{j+k}) - \varphi(v'_{j-k-1})\right)\left(\ln\left|\sin\frac{\pi}{2N}(2(j+k+1)L - 2i - 1)\right| -\right.$$

$$\left. - \ln\left|\sin\frac{\pi}{2N}(2(j+k)L - 2i - 1)\right|\right) + R_N(\varphi), \tag{3.2}$$

где $t'_k = (t_k + t_{k+1})/2, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \quad v'_k = (v_k + v_{k+1})/2, \quad k = 0, 1, \ldots, M-1, \quad r = i - jL$.

Теорема 3.1 [36] Пусть $\Psi = H_\alpha(1), 0 < \alpha \le 1$. Среди всевозможных к.ф. вида (3.1) формула (3.2) является асимптотически оптимальной по точности и имеет погрешность $R_N[H_\alpha(1)] \sim 2\ln N/(\pi^{1-\alpha}(1 + \alpha)N^\alpha)$.

Доказательство подобно доказательству теоремы 2.1 главы 3.

Оценим сложность к.ф. вида (3.1). В качестве набора простейших операций возьмем набор $P = \{$арифметические операции, вычисление значения функции$\}$.

Теорема 3.2 [36] Пусть $\Psi = H_\alpha(1), 0 < \alpha \leq 1$. Среди всевозможных к.ф. вида (3.1) формула (3.2) является асимптотически оптимальной по сложности.

Доказательство. Вначале оценим число простейших операций, необходимых для реализации к.ф. вида (3.1) при произвольном s $(0 \leq \leq s \leq 2\pi)$ и без предварительной обработки коэффициентов.

Выше было показано, что асимптотически оптимальная к.ф., использующая N узлов, имеет погрешность $(1 + o(1))2\ln N/(\pi^{1-\alpha}(1 + + \alpha)N^\alpha)$. Это означает, что существует такая константа , что при всех $1 \leq N < \infty$ $\zeta_N[\Psi] \geq AN^{-\alpha}\ln N$. Пусть $\varepsilon-$ точность вычисления сингулярного интеграла на классе Ψ. Из определения функционала $\zeta_N[\Psi]$ следует, что $\varepsilon \geq \zeta_N[\Psi]$. Отсюда получаем оценку снизу числа узлов N_0, необходимых для достижения точности ε : $AN_0^{-\alpha}\ln N_0 \geq \varepsilon$. Решая это неравенство, имеем $N_0 \asymp \left(\frac{|\ln\varepsilon|}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha}$. Полагая $\varepsilon = \frac{2\ln N}{\pi^{1-\alpha}(1+\alpha)N^\alpha}$, получаем, что размерность информационного оператора $\eta_N =$ $= (\varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_N))$ равна

$$N = (1 + o(1))\frac{2|\ln\varepsilon|}{(\pi^{1-\alpha}(1+\alpha)\varepsilon)^{1/\alpha}}.$$

Оценка снизу сложности к.ф. вида (3.1) равна $\sum\limits_{i=1}^{N}(c_i + a_i) + N_1$, где c_i- сложность вычисления каждого функционала $f(t_i)$; $1 \leq i \leq N$; a_i- сложность вычисления каждой весовой функции $p_i(s)$; N_1- число арифметических действий, необходимых для реализации к.ф. (3.1). Очевидно, $c_i \geq 2,\ a_i \geq 0$. Для оценки N_1 заметим, что для вычисления интеграла $F\varphi$ с точностью ε при заранее неизвестном значении параметра s требуется N значений функционала $\varphi(t_k)$. Если же вычисляется интеграл $F\varphi$ в известной точке s, то, как показано в главе 2, при исследовании сингулярных интегралов с фиксированной сингулярностью, число функционалов $\varphi(t_k)$, необходимых для достижения точности ε, равно $AN/\ln^{1/\alpha} N$. Следовательно, $N_1 \geq AN/\ln^{1/\alpha} N$ и $\mathrm{comp}(\eta_\mathrm{N}, \mathrm{F}, \varepsilon) \geq 2(1 + \mathrm{o}(1))\mathrm{N}$.

Оценим число арифметических действий, необходимое для реализации к.ф. (3.2).

Вначале оценим число арифметических действий, необходимых для вычисления

$$y_k = \ln\left|\sin\frac{\pi}{2N}(2k+1)\right|,\ k = 1,\dots,M,$$

и

$$z_k = \ln\left|\sin\frac{\pi}{2M}(2k+1)\right|,\ k = 1,2,\dots,M.$$

Для вычисления $\sin\frac{\pi}{2N}(2k+1)$ с точностью $\varepsilon = N^{-1}$ воспользуемся следующим алгоритмом. Вычислим с точностью $\varepsilon_0 = 4^{-M}\varepsilon$ значения $\sin\frac{\pi}{2N}$ и $\cos\frac{\pi}{2N}$ по формуле Тейлора. Для этого в разложении

$$\sin\frac{\pi}{2N} = \left(\frac{\pi}{2N}\right) - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2N}\right)^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{2N}\right)^{2n+1}$$

достаточно положить $(2n+1) = [N/\log_2 N]$. Аналогичное разложение используется и для вычисления $\cos\frac{\pi}{2N}$.

Значения $\sin\frac{\pi}{N}$ и $\cos\frac{\pi}{N}$ вычисляются по формулам

$$\sin\frac{\pi}{N} = 2\sin\frac{\pi}{2N}\cos\frac{\pi}{2N}$$

и

$$\cos\frac{\pi}{N} = \cos^2\frac{\pi}{2N} - \sin^2\frac{\pi}{2N}.$$

При этом погрешность в вычислении $\sin\frac{\pi}{N}$ и $\cos\frac{\pi}{N}$ не превосходит $2(1+\frac{\pi}{2N})\varepsilon_0 + 2\varepsilon_0^2 \le 2(1+\frac{\pi}{N})\varepsilon_0 = \varepsilon_0'$. Значения $\sin\frac{\pi}{2N}(2k+1)$ и $\cos\frac{\pi}{2N}(2k+1)$ вычисляются по формулам

$$\sin\frac{\pi}{2N}(2k+1) = \sin\left(\frac{\pi}{2N}(2k-1)\right)\cos\frac{\pi}{N} + \sin\frac{\pi}{N}\cos\left(\frac{\pi}{2N}(2k-1)\right),$$

$$\cos\frac{\pi}{2N}(2k+1) = \cos\left(\frac{\pi}{2N}(2k-1)\right)\cos\frac{\pi}{N} - \sin\left(\frac{\pi}{2N}(2k-1)\right)\sin\frac{\pi}{N},$$

$k = 1,2,\dots,N$.

При $k = 1$ погрешность вычисления не превосходит $\varepsilon_1 < 2\varepsilon_0'$. Нетрудно видеть, что если на k-м шаге вычислений погрешности вычисления $\sin\frac{\pi}{2N}(2k+1)$ и $\cos\frac{\pi}{2N}(2k+1)$ равны ε_k, то на следующем шаге они не превосходят $\left(1+\frac{\pi}{N}\right)\varepsilon_k + \left(1+\frac{\pi}{2N}\right)(2k+1)\varepsilon_0{}' + 2\varepsilon_0{}'\varepsilon_k$ при вычислении $\sin\frac{\pi}{2N}(2k+3)$ и не превосходят $\left(1+\frac{\pi(2k+1)}{2N}\right)\varepsilon_0' + \left(1+\frac{\pi}{N}\right)\varepsilon_k + 2\varepsilon_0{}'\varepsilon_k$ при вычислении $\cos\frac{\pi}{2N}(2k+3)$. Из этих неравенств следует, что $\varepsilon_{k+1} \le 4\varepsilon_k$. Следовательно, $\varepsilon_M \le 4^{M-1}\varepsilon_1 \le 4^M\varepsilon_0 \le \varepsilon$.

Из приведенных выше рассуждений следует, что для вычисления $\zeta_k = \sin\frac{\pi}{2N}(2k+1)$ с точностью ε требуется $AN/\log_2 N$ арифметических действий.

Нетрудно видеть, что для вычисления $\eta_k = \sin\frac{\pi}{2N}(2kL+1),\ k = 1,2,\ldots,M$, также требуется $AN/\log_2 N$ арифметических действий.

Обозначим через ζ'_k и η'_k результат приближенного вычисления ζ_k и η_k по описанному выше алгоритму.

Приступим к вычислению значений y_k и $z_k,\ k = 0,1,\ldots,M$ с точностью N^{-1}. (Можно показать, что этой точности достаточно для сохранения асимптотической оптимальности к.ф. (3.2) после замены точных значений y_k приближенными.) При этом вычисление значений y_k и z_k при $0 \le k \le [M/4]$ и при $[M/4]+1 \le k \le M$ приходится проводить по различным формулам. Пусть вначале $0 \le k \le [M/4]$. Введем обозначение $x_k = \pi(2k+1)/2N$. Тогда $y_k = \ln\zeta_k = \ln(x_k(1 + (\zeta'_k - x_k)/x_k)) = \ln x_k + \ln(1 + (\zeta'_k - x_k)/x_k)$.

Число арифметических действий, необходимых для вычисления $\ln x_k, k = 1,2,\ldots,M$, было оценено в разд. 1, где было показано, что оно не больше $AN/\ln N$. Вычисление $\ln(1 + (\zeta'_k - x_k)/x_k),\ k = 1,2,\ldots,M$, с точностью N^{-1} проводится по формуле Тейлора. Можно показать, что необходимое для этого число арифметических действий не превосходит $AN/\ln N$.

При $[M/4]+1 \le k \le M$ вычисление $y_k = \ln\zeta_k$ проводится по формуле (1.7). Можно показать, что для этого требуется не более чем $AN/\ln N$ арифметических действий.

Аналогичным образом можно показать, что число арифметических действий, используемых для вычисления η_k и $z_k,\ k = 1,2,\ldots,M$, не превосходит $N/\log_2 N = o(N)$.

Таким образом, общее число арифметических действий, необходимое для реализации квадратурной формулы (3.2), не превосходит $2(1+o(1))N$.

Теорема доказана.

4. Оптимальные по сложности алгоритмы вычисления полисингулярных интегралов

Рассмотрим полисингулярный интеграл

$$F\varphi = \frac{1}{(2\pi)^l} \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} \varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_l) \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \dots \operatorname{ctg} \frac{\sigma_l - s_l}{2} d\sigma_1 \dots d\sigma_l. \tag{4.1}$$

В дальнейшем положим $l = 2$. Из проводимых выкладок будет видно, что все полученные ниже результаты распространяются на интегралы любой конечной размерности.

Интеграл (4.1) будем вычислять по кубатурным формулам вида

$$F\varphi = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=0}^{N} p_{kl}(s_1, s_2)\varphi(t_k, t_l) + R_N(s_1, s_2; p_{kl}; t_k, t_l; \varphi). \tag{4.2}$$

При построении кубатурной формулы для простоты обозначений предположим, что $N = 2n + 1$ и что N, L, M, M_1- целые числа, связанные между собой соотношениями $M = N/L,\ M_1 = M/L,\ L = A \ln N$. Через $A(A \geq 1)$ обозначено наименьшее число, при котором выполняются указанные соотношения.

Введем обозначения: $t_k = 2k\pi/N,\ k = 0, 1, \dots, N, t'_k = (2k+1)\pi/N,\ k =$

$= 0, 1, \dots, N-1,\ \Delta_{kl} = [t_k, t_{k+1}; t_l, t_{l+1}],\ k, l = 0, 1, \dots, N-1.$

Будем считать область $D = [0, 2\pi]^2$ закольцованной, т.е. $x_1 + 2\pi =$ $= x_1,\ x_2 + 2\pi = x_2$, где $x_1, x_2 \in D$.

Пусть $(s_1, s_2) \in \Delta_{ij}$. Поставим узлу (i, j) в соответствие следующие прямоугольники:

$$\Gamma_{kl}^{++} = [t_{i+1+kL}, t_{i+1+(k+1)L}; t_{j+1+lL}, t_{j+1+(l+1)L}];$$

$$\Gamma_{kl}^{+-} = [t_{i+1+kL}, t_{i+1+(k+1)L}; t_{j-(l+1)L}, t_{j-lL}];$$

$$\Gamma_{kl}^{-+} = [t_{i-(k+1)L}, t_{i-kL}; t_{j+1+lL}, t_{j+1+(l+1)L};$$

$$\Gamma_{kl}^{--} = [t_{i-(k+1)L}, t_{i-kL}; t_{j-(l+1)l}, t_{j-lL}];$$

$$d_{kl}^{++} = [t_{i+1+k}, t_{i+k+2}; t_{j+1+lL}, t_{j+1+(l+1)L}];$$

$$d_{kl}^{+-} = [t_{i+1+k}, t_{i+k+2}; t_{j-(l+1)L}, t_{j-lL}];$$

$$d_{kl}^{-+} = [t_{i-k-1}, t_{i-k}; t_{j+1+lL}, t_{j+1+(l+1)L}];$$
$$d_{kl}^{--} = [t_{i-k-1}, t_{i-k}; t_{j-(l+1)L}, t_{j-lL}];$$
$$q_{kl}^{++} = [t_{i+1+kL}, t_{i+1+(k+1)L}; t_{j+l+1}, t_{j+l+2}];$$
$$q_{kl}^{+-} = [t_{i+1+kL}, t_{i+1+(k+1)L}; t_{j-l-1}, t_{j-l}];$$
$$q_{kl}^{-+} = [t_{i-(k+1)L}, t_{i-kL}; t_{j+l+1}, t_{j+l+2}];$$
$$q_{kl}^{--} = [t_{i-(k+1)L}, t_{i-kL}; t_{j-l-1}, t_{j-l}].$$

Каждой из областей $\Gamma_{kl}^{\pm\pm}$ поставим в соответствие узел $M_{kl}^{\pm\pm}$, в качестве которого берется точка из множества (t'_r, t'_s), $r, s = 0, 1, \ldots, N$, ближайшая к центру тяжести соответствующей области. Если таких точек несколько, то выбор осуществляется произвольно. Значение функции $\varphi(t_1, t_2)$ в точке $M_{kl}^{\pm\pm}$ области $\Gamma_{kl}^{\pm\pm}$ будем обозначать как $\varphi(M_{kl}, \Gamma_{kl}^{\pm\pm})$. Аналогичный смысл имеют обозначения $\varphi(M_{kl}, d_{kl}^{\pm\pm})$, $\varphi(M_{kl}, q_{kl}^{\pm\pm})$.

Рассмотрим кубатурную формулу

$$F\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \left(\varphi(t'_{i+k,j+l}) - \varphi(t'_{i+k,j-l-1}) - \varphi(t'_{i-k-1,j+l}) + \varphi(t'_{i-k-1,j-l-1})\right) \times$$
$$\times \left(\ln\left|\sin\frac{\pi(2k+1)}{2N}\right| - \ln\left|\sin\frac{\pi(2k-1)}{2N}\right|\right) \times$$
$$\times \left(\ln\left|\sin\frac{\pi(2l+1)}{2N}\right| - \ln\left|\sin\frac{\pi(2l-1)}{2N}\right|\right) +$$
$$+\frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=M_1}^{M-1} \sum_{l=M_1}^{M-1} \left(\varphi(M_{kl}, \Gamma_{kl}^{++}) - \varphi(M_{kl}, \Gamma_{kl}^{+-}) - \varphi(M_{kl}, \Gamma_{kl}^{-+}) + \varphi(M_{kl}, \Gamma_{kl}^{--})\right) \times$$
$$\times \int\limits_{\Gamma_{kl}^{++}} \int \mathrm{ctg}\frac{\sigma_1 - \mathrm{t_i}}{2} \mathrm{ctg}\frac{\sigma_2 - \mathrm{t_j}}{2} \mathrm{d}\sigma_1 \mathrm{d}\sigma_2 +$$
$$+\frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{l=M_1}^{M-1} \left(\varphi(M_{kl}, d_{kl}^{++}) - \varphi(M_{kl}, d_{kl}^{+-}) - \varphi(M_{kl}, d_{kl}^{-+}) + \varphi(M_{kl}, d_{kl}^{--})\right) \times$$
$$\times \int\limits_{d_{kl}^{++}} \int \mathrm{ctg}\frac{\sigma_1 - \mathrm{t_i}}{2} \mathrm{ctg}\frac{\sigma_2 - \mathrm{t_j}}{2} \mathrm{d}\sigma_1 \mathrm{d}\sigma_2 +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\sum_{k=M_1}^{M-1}\sum_{l=1}^{M-1}\left(\varphi(M_{kl},q_{kl}^{++})-\varphi(M_{kl},q_{kl}^{+-})-\varphi(M_{kl},q_{kl}^{-+})+\varphi(M_{kl},q_{kl}^{--})\right)\times$$

$$\times\int\limits_{q_{kl}^{++}}\int \mathrm{ctg}\frac{\sigma_1-\mathrm{t_i}}{2}\mathrm{ctg}\frac{\sigma_2-\mathrm{t_j}}{2}\mathrm{d}\sigma_1\mathrm{d}\sigma_2+\mathrm{R_N}(\varphi). \qquad (4.3)$$

Теорема 4.1. Пусть $\Psi = H_{\alpha,\alpha}(1), 0 < \alpha < 1$. Среди всевозможных кубатурных формул вида (4.2) асимптотически оптимальной по точности является формула (4.3). Ее погрешность равна

$$R_N[\Psi] = (1+o(1))8\ln^2 N/(1+\alpha)\pi^{2-\alpha}N^{\alpha}.$$

Доказательство подобно доказательству теоремы 3.6 главы 4 и поэтому опускается.

Оценим сложность куб.ф. (4.3). В качестве набора простейших операций возьмем набор $P = \{\ ,$
$\}$.

Теорема 4.2. Пусть $\Psi = H_{\alpha,\alpha}(1), 0 < \alpha \le 1$. Среди всевозможных кубатурных формул вида (4.2) формула (4.3) является асимптотически оптимальной по сложности.

Доказательство теоремы 4.2. Вначале оценим число простейших операций, необходимых для реализации кубатурной формулы (4.3) с точностью ε при произвольных значениях s_1, s_2 $(0 \le s_1, s_2 \le$
$\le 2\pi)$ и без предварительной обработки коэффициентов.

Выше было показано, что асимптотически оптимальная кубатурная формула, использующая N^2 узлов, имеет погрешность
$(1+o(1))8\ln^2 N/(1+\alpha)\pi^{2-\alpha}N^{\alpha}$. Это означает, что существует такая константа A $(0 < A < \infty)$, что при всех $1 \le N < \infty$ $\zeta_N[\Psi] \ge$
$\ge AN^{-\alpha}\ln^2 N$. Пусть $\varepsilon-$ точность вычисления полисингулярного интеграла на классе Ψ. Из определения функционала $\zeta_N[\Psi]$ следует, что $\varepsilon \ge \zeta_N[\Psi]$. Отсюда получаем оценку снизу числа узлов $n_0 = N_0^2$, необходимых для достижения точности $\varepsilon : AN_0^{-\alpha}\ln^2 N_0 \ge \varepsilon$. Из этого неравенства имеем $N_0 \asymp \left(\frac{|\ln^2\varepsilon|}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha}$ и, следовательно, $n_0 = A\left(\frac{|\ln^2\varepsilon|}{\varepsilon}\right)^{2/\alpha}$.

Полагая $\varepsilon = 8\ln N/(1+\alpha)\pi^{2+\alpha}N^{\alpha}$, получаем, что размерность информационного оператора $\eta_n = (\varphi(t_1,t_1),\varphi(t_1,t_2),\ldots,\varphi(t_N,t_N))$ равна $n = [(8(\ln^2\varepsilon)/(1+\alpha)\pi^{2-\alpha}\varepsilon)^{2/\alpha}]+1$. Оценка снизу сложности формул

вида (4.2) равна

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}(c_{kl}+a_{kl})+N_1,$$

где c_{kl}— сложность вычисления каждого функционала $\varphi(t'_k,t'_l)$; a_{kl}— сложность вычисления каждой весовой функции p_{kl}; N_1— число арифметических действий, необходимых для реализации формулы (4.2). Очевидно, $a_{kl}\geq 0$,

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}c_{kl}\geq N^2+2N=(1+o(1))N^2.$$

Для оценки N_1 заметим, что для достижения погрешности вычисления полисингулярного интеграла $F\varphi$ в произвольной, заранее неизвестной точке $(s_i,s_j)\in[0,2\pi]^2$ необходимо располагать N^2 значениями функционала $\varphi(t_k,t_l)$. Однако вычисление интеграла $F\varphi$ в конкретной точке $(s_i,s_j)\in[0,2\pi]^2$ с точностью ε требует, как легко видеть из рассуждений, проведенных в параграфе 2 главы 4 монографии [36], $AN^2/\ln N$ значений функционалов $\varphi(t_k,t_l)$. Следовательно,
$N_1\geq AN^2/\ln N=o(N^2)$. Таким образом, $\mathrm{comp}(\eta_{\mathrm{n}},\mathrm{F},\varepsilon)\geq(1+\mathrm{o}(1))\mathrm{N}^2$.

Оценим число арифметических действий N_2, необходимых для реализации кубатурной формулы (4.3). Прежде всего отметим, что вычисление интегралов, стоящих в правой части формулы (4.3), сводится к вычислению $\ln\left|\sin\frac{\pi}{2N}(2k+1)\right|$ и $\ln\left|\sin\frac{\pi}{2N}(2kL+1)\right|$, $k=0,1,\ldots,M$.

Число арифметических действий, необходимых для вычисления этих значений, оценивалось в предыдущем разделе. Повторяя проведенные там рассуждения, можно показать, что число арифметических действий, необходимых для вычисления $\ln\left|\sin\frac{\pi}{2N}(2k+1)\right|$ и
$\ln\left|\sin\frac{\pi}{2N}(2kL+1)\right|$, $k=0,1,\ldots,M$, с точностью N^{-2}, есть величина $O(N/\ln N)=o(N)$.

Число арифметических действий, необходимых для реализации кубатурной формулы (4.3), есть величина $AM=O(N/\ln N)=o(N)$.

Таким образом, сложность кубатурной формулы (4.3) равна $(1+$
$+o(1))N^2$.

Теорема доказана.

ГЛАВА 7

ПРИМЕНЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЕМКОСТИ ТЕЛ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

В обзоре, приведенном в первой главе и посвященном приближенным методам вычисления сингулярных интегралов, перечислены многочисленные разделы физики и техники, при исследовании которых возникает необходимость в вычислении сингулярных интегралов. Не менее многочисленными являются приложения слабосингулярных интегралов. Данная глава посвящена одному из таких приложений — итерационному методу вычисления электрической емкости проводящего тела произвольной формы.

Вычисление электрической емкости тела произвольной формы является классической задачей электростатики, которой посвящено более 800 работ. Изложение известных методов и подробная библиография содержатся в книгах [83], [120], [121]. При этом остался открытым вопрос о приближенных методах вычисления электрической емкости тел произвольной формы. Эффективный алгоритм решения этой задачи дан в статье [165].

В качестве одного из приложений здесь изложен приближенный метод вычисления электрической емкости тел произвольной формы.

1. Итерационные методы вычисления электрической емкости тел произвольной формы

В монографии [210] предложена аналитическая формула для вычисления емкости произвольного тела с любой наперед заданной точностью ε :

$$C^{(n)} =$$

$$= 4\pi\varepsilon_0 S^2 \left\{ \frac{(-1)^n}{(2\pi)^n} \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\Gamma} \frac{dsdt}{r_{st}} \underbrace{\int\limits_{\Gamma} \dots \int\limits_{\Gamma}}_{n} \psi(t,t_1)\dots\psi(t_{n-1},t_n)dt_1\dots dt_n \right\}^{-1}, \tag{7.1}$$

где $S-$ площадь поверхности Γ проводника, ε_0- электрическая проницаемость, $r_{st} := |s-t|$ и $\psi(t,s) := \frac{\partial}{\partial N_t}\frac{1}{r_{st}}$,

$$C^{(0)} = \frac{4\pi\varepsilon_0 S^2}{J} \leq C, \quad J \equiv \int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\Gamma} \frac{dsdt}{r_{st}}.$$

Там же доказано, что $\left|C - C^{(n)}\right| \leq Aq^n, \quad 0 < q < 1$, где A и $q-$ постоянные, зависящие от формы тела Γ.

Используем формулу (7.1) для построения численного алгоритма вычисления электрической емкости.

В монографии [210] показано, что

$$C^{(n)} = 4\pi\varepsilon_0 S^2 \left(\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\Gamma} r_{st}^{-1}\delta_n(t)dtds\right)^{-1}, \tag{7.2}$$

где δ_n определяется последовательными приближениями

$$\delta_{n+1} = -A\delta_n, \ \delta_0 = 1, \int\limits_{\Gamma} \delta_n dt = S, \tag{7.3}$$

а оператор A определяется формулой

$$A\delta = \int\limits_{\Gamma} \delta(t)\frac{\partial}{\partial N_s}\frac{1}{2\pi r_{st}}dt,$$

где N_s- внешняя единичная нормаль к поверхности Γ в точке s.

При использовании итерационного метода (7.3) необходимо располагать эффективными кубатурными формулами для вычисления интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} \delta(t)\frac{\partial}{\partial N_S}\frac{1}{r_{st}}dt. \tag{7.4}$$

Опишем кубатурную формулу вычисления интеграла (7.4), предполагая, для простоты обозначений, что область G, ограниченная поверхностью $\Gamma, -$ выпуклая. Следует отметить, что предлагаемый алгоритм может быть применен к телам произвольной формы.

Обозначим через S сферу с центром в начале координат и с максимальным радиусом r^*, вписанную в поверхность Γ. Введем сферические координаты (r, φ, Θ) и через $(r^*, \varphi_k, \Theta_l)$ обозначим систему узлов $\varphi_k = 2k\pi/n$, $k = 0, 1, \ldots, n, \Theta_l = \pi l/m, l = 0, 1, \ldots, m$.

Предположим, что $m-$ четное число и покроем сферу S сферическими треугольниками $\Delta_k,\ k=1,2,\ldots,N,\ N=2n(m-1)$.

Опишем построение сферического треугольника. При $0\le\Theta\le$ $\le\pi/m$ треугольники $\Delta_k, k=1,2,\ldots,n$, имеют вершины $(r^*,0,0)$, $(r^*,\varphi_{k-1},\theta_1)$, (r^*,φ_k,θ_1), $k=1,2,\ldots,n$.

При $\theta_l\le\theta\le\theta_{l+1},\ l=1,2,\ldots,m/2-1$, треугольники $\Delta_k, k=n+$ $+2n(l-1)+j,\ 1\le j\le 2n$, строятся следующим образом. Прямоугольник $[0,2\pi;\theta_l,\theta_{l+1}]$ покрывается квадратами $\Delta_{kl}=[\varphi_k,\varphi_{k+1};\theta_l,\theta_{l+1}],\ k=$ $=0,1,\ldots,n-1$. Каждый квадрат Δ_{kl} делится на два равных треугольника Δ^1_{kl} и $\Delta^2_{kl},\ k=0,1,\ldots,n-1,\ l=1,2,\ldots,m/2-1$. Сферические треугольники Δ^1_{kl} и $\Delta^2_{kl},\ k=0,1,\ldots,n-1,\ l=1,2,\ldots,m/2-1$, являются образами треугольников Δ^1_{kl} и Δ^2_{kl} на сфере S.

В результате этих построений сфера S оказывается покрытой треугольниками $\Delta_k,\ k=1,2,\ldots,N$.

Проведем прямые из начала координат через вершины треугольников $\Delta_k,\ k=1,2,\ldots,N$. Точки пересечения этих прямых с поверхностью Γ являются вершинами треугольников $\overline{\Delta}_k,\ k=1,2,\ldots,N$. В результате этих построений поверхность Γ аппроксимируется поверхностью Γ_N, состоящей из плоских треугольников $\overline{\Delta}_k,\ k=1,2,\ldots,N$, и интеграл (7.4) аппроксимируется интегралом

$$U(s)=\int\limits_{\Gamma_N}\delta(t)\frac{\partial}{\partial N_S}\frac{1}{r_{st}}dt. \tag{7.5}$$

Зафиксируем произвольный треугольник $\overline{\Delta}_k,\ k=1,2,\ldots,N$, и поставим ему в соответствие точку $\tau_k\in\overline{\Delta}_k,\ k=1,2,\ldots,N$, равноудаленную от вершин треугольника $\overline{\Delta}_k,\ k=1,2,\ldots,N$. Вычислим интеграл (7.5) в точках $\tau_k,\ k=1,2,\ldots,N$, по кубатурным формулам, описанным в разд. 1 главы 4. После вычисления значений $U(\tau_k),\ k=1,2,\ldots,N$ по этим кубатурным формулам вычисляется первая итерация

$$\tilde{C}^{(1)}=-4\pi\varepsilon_0S_N^2\left(\int\limits_{\Gamma_N}\int\limits_{\Gamma_N}r_{st}^{-1}\tilde{U}(t)dtds\right)^{-1},$$

где $\tilde{U}(t)=U(\tau_k)$ при $t\in\overline{\Delta}_k,\ k=1,2,\ldots,N$, S_N- площадь поверхности Γ_N, $\tilde{C}^{(1)}-$ приближение к $C^{(1)}$. Последующие итерации вычисляются аналогично.

Таким образом, для вычисления емкости реализуется следующий вычислительный процесс:

$$\delta_{n+1} = -A_N \delta_n, \quad \delta_0 = 1, \quad \int\limits_{\Gamma_N} \delta_n dt = S_N, \tag{7.6}$$

$$C_N^{(n)} = 4\pi\varepsilon_0 S_N^2 \left(\int\limits_{\Gamma_N} \int\limits_{\Gamma_N} r_{st}^{-1} \delta_n(t) dt \right)^{-1}, \tag{7.7}$$

где

$$A_N \delta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_N} \delta(t) \frac{\partial}{\partial N_s} \frac{1}{r_{st}} dt.$$

2. Описание программы

В этом разделе дается описание блок-схемы программы вычисления емкости тел произвольной формы.

Пусть $G-$ выпуклое ограниченное замкнутое тело, емкость которого нужно вычислить. Пусть $\Gamma-$ поверхность, ограничивающая область G. Полагаем, что поверхность Γ определяется аналитическими выражениями. Обозначим через O центр тела G (или точку близкую к центру).

Поместим в точку O начала декартовой и сферической систем координат. Впишем внутрь поверхности Γ сферу с центром в точке O. Для простоты обозначений предположим, что радиус сферы равен 1.

Обозначим через v_{kl} точку с координатами $v_{kl} = (1, \theta_k, \varphi_l)$, $\theta_k = k\pi/N$, $\varphi_k = 2k\pi/N$, $k = 0, 1, \ldots, N$. Проведем триангуляцию единичной сферы следующим образом. Соединим точку v_{00} с точками v_{1k}, $k = 0, 1, \ldots, N$, и соседние точки v_{1k}, $k = 0, 1, \ldots, N$, между собой. В результате получаем N треугольников, которые обозначим через Δ_{0k}, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Нанесем на единичную сферу N точек v_{2k}, $k = 0, 1, \ldots, N$, которые последовательно соединим между собой. Соединим каждую точку v_{1k}, с точкой v_{2k}, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, и с точкой $v_{2,k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, N-2$. В результате получаем N треугольников $\Delta_{1k}^1 = (v_{1k}, v_{2k}, v_{2,k+1})$ и N треугольников $\Delta_{1k}^2 = (v_{1k}, v_{1,k+1}, v_{2,k+1})$.

Продолжая эти действия, аппроксимируем поверхность единичной сферы $2n(N-1)$ треугольниками $\Delta_{0,l}$, $\Delta_{k,l}^i$, $i = 1, 2$, $k = 1, 2, \ldots, N-2$, $\Delta_{N,l}$, $l = 0, 1, \ldots, N-1$.

Триангуляцией поверхности единичной сферы заканчивается первый этап построения программы.

Второй этап программы заключается в триангуляции поверхности Γ. Для этого из начала координат через вершины каждого из треугольников $\Delta_{0,l}$, $\Delta^i_{k,l}$, $k = 1, 2, \ldots, N-2$, $i = 1, 2$, $\Delta_{N,l}$, $l = 0, 1, \ldots, N-$ -1, проводим лучи до пересечения с поверхностью Γ. При этом каждый треугольник $\Delta_{0,l}$, $\Delta^i_{k,l}$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$, $\Delta_{N,l}$, $l = 0, 1, \ldots, N-1$, отображается в треугольник $\bar{\Delta}_{0,l}$, $\bar{\Delta}^i_{k,l}$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$, $\bar{\Delta}_{N,l}$, $l =$ $= 0, 1, \ldots, N-1$. Поверхность, составленную из этих треугольников, обозначим через Γ_N, а ее площадь через S_N.

На третьем этапе вычисляются площади $\bar{\Delta}_{0,l}$, $\bar{\Delta}^i_{k,l}$, $i = 1, 2$, $k =$ $= 2, \ldots, N-2$, $\bar{\Delta}_{N,l}$, $l = 0, 1, \ldots, N-1$; вычисляются направляющие косинусы и находятся внешние единичные нормали к каждому треугольнику.

На четвертом и пятом этапах вычисляются слабосингулярные интегралы.

Обозначим через δ_0 начальное приближение. Положим, следуя [210], $\delta_0 = 1$. Согласно (7.2), для вычисления первого приближения к точному значению емкости, нужно вычислить последовательно два слабосингулярных интеграла по формуле

$$C^{(1)} = 4\pi\varepsilon S_N^2 \left(\int\limits_{\Gamma_N} \int\limits_{\Gamma_N} \frac{d\tau}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{1/2}} \right)^{-1}.$$

На четвертом этапе вычисляются функции

$$\psi(t_1, t_2) = \int\limits_{\Gamma_N} \frac{d\tau}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{1/2}} \tag{7.8}$$

на сетке узлов, которая на следующем этапе будет сеткой узлов кубатурной формулы, предназначенной для вычисления интеграла

$$\int\limits_{\Gamma_N} \int\limits_{\Gamma_N} \psi(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \tag{7.9}$$

Для того, чтобы упростить программу, интегралы в формулах (7.8) и (7.9) вычисляются по одним и тем же системам узлов.

Так как интеграл в формуле (7.8) берется по кусочно-гладкой области Γ_N, то функция $\psi(t_1, t_2)$ на всей поверхности Γ_N принадлежит классу Гельдера, причем уже первые частные производные функции $\psi(t_1, t_2)$

имеют разрывы. Поэтому для вычисления интегралов (7.8) и (7.9) используются оптимальные по порядку кубатурные формулы вычисления слабосингулярных интегралов на классе функций Гельдера.

Таким образом, в каждом треугольнике $\Delta_{0,l}$, $\Delta^i_{k,l}$, $i = 1, 2$, $k = 1, 2, \ldots, N-2$, $\Delta_{N,l}$, $l = 0, 1, \ldots, N-1$, строится оптимальная по порядку кубатурная формула вычисления слабосингулярных интегралов на классах Гельдера.

Для этого в каждом треугольнике $\Delta_{0,l}$, $\Delta^i_{k,l}$, $i = 1, 2$, $k = 1, 2, \ldots, N-2$, $\Delta_{N,l}$, $l = 0, 1, \ldots, N-1$, вводятся узлы $M_{0,l}(j)$, $M^i_{k,l}(j)$, $i = 1, 2$, $k = 1, 2, \ldots, N-2$, $M_{N,l}(j)$, $l = 0, 1, \ldots, N-1$, $j = 1, 2, \ldots, m$, где m– число узлов кубатурной формулы.

Далее вычисляются значения функции $\psi(t_1, t_2)$ в точках $M_{0,l}(j)$, $M_{k,l}(j)$, $k = 1, 2, \ldots, N-2$, $i = 1, 2$, $M_{k,l}(j)$, $l = 0, 1, \ldots, N-1$, $j = 1, 2, \ldots, m$, по описанным выше кубатурным формулам.

На пятом этапе вычисляется интеграл (7.7) по описанным выше квадратурным формулам.

На шестом этапе вычисляется первое приближение к точному значению емкости.

На седьмом этапе организуется цикл вычислений последовательных приближений. Выход из цикла определяется числом заданных заранее итераций.

Листинг программы состоит из 35 страниц и здесь не приводится. Программа написана на языке Паскаль и выполнена в среде DELPHY.

3. Численные примеры

В этом разделе приводятся результаты численных экспериментов. В качестве примера вычислим емкости эллипсоидов, так как для них известны аналитические формулы, выражающие электрическую емкость через длины полуосей. Это дает возможность реально оценить точность построенного алгоритма.

Рассмотрим эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Известно [83], что точное значение величины емкости эллипсоида при $a = b$ равно

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2 - c^2}}{\arccos(\mathrm{c/a})},$$

где ε_0- диэлектрическая постоянная.

Пусть $a = b = 1$, $\varepsilon_0 = 1$. Будем вычислять емкость эллипсоида при различных значениях длины полуоси c. Результаты вычислений приведены в табл. 7.1.

Очень важным моментом в численных методах является устойчивость алгоритмов к различным помехам.

Исследуем устойчивость построенного алгоритма к возмущениям начальных значений.

В итерационной схеме (7.6) вместо начального приближения $\delta_0 \equiv 1$ возьмем начальное приближение $\tilde{\delta}_0 = (\delta_0^1, \ldots, \delta_0^n)$, где δ_0^k- значение начального приближения $\tilde{\delta}_0$ на треугольнике Δ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Значения δ_0^k определяются формулой $\delta_0^k = 1+2(\mathrm{random(k)}-0,5)\delta$, где $\mathrm{random(k)}-$ к-е значение датчика случайных чисел, $\delta-$ коэффициент возмущения.

Результаты численных экспериментов при различных значениях приведены в табл. 7.2.

4. Заключение

В предыдущих разделах описан итерационный метод вычисления электрической емкости уединенных тел произвольной геометрической формы. Предложенная вычислительная схема и ее программная реализация показали при теоретичеких исследованиях и при решении модельных примеров высокую точность и устойчивость к возмущениям начальных данных. При этом наряду с вычислением емкости эллипсоидов вращения, результаты которых приведены в табл. 7.1 м 7.2, метод был протестирован на большом числе замкнутых тел произвольной геометрической формы. Результаты тестирования всех модельных примеров показали высокую эффективность вычислительной схемы. Это позволяет утверждать, что создан универсальный приближенный метод вычисления электрической емкости тел произвольной геометрической формы.

Список литературы

1. Абдуллаева Г.Г. О регуляризации по А.Н.Тихонову особого интеграла Коши // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1976. - Т. 16. - N 1. - С. 237 - 242.

2. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа.-М.: Наука. 1978. 351 с.

3. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. - М.: Наука, 1965. - 407 с.

4. Бабаев А.А. Квадратурный процесс для сингулярного интеграла по разомкнутому контуру вещественной оси и условия его сходимости/ А.А. Бабаев, Р.С. Садырханов // Изв. АН Аз.ССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. - 1978. - N 2. - С. 8 - 16.

5. Бабенко В.Ф. Асимптотически точная оценка остатка наилучших для некоторых классов функций кубатурных формул // Математические заметки. - 1976. - Т. 19. - N 3. - С. 313 - 322.

6. Бабенко В.Ф. Точная асимптотика остатков оптимальных для некоторых классов весовых кубатурных формул // Математические заметки. - 1976. - Т. 20. - N 4. - С. 589 - 595.

7. Бабенко В.Ф. О наилучшем линейном приближении некоторых классов дифференцируемых периодических функций/ В.Ф. Бабенко, С.Ф. Пичугов // Математические заметки. - 1980. - Т. 27. - N 5. - С. 683 - 689.

8. Бабенко К.И. О некоторых задачах теории приближений и численного анализа // Успехи математических наук. - 1985. - Т. 40. - Вып. 1. - С. 3 - 28.

9. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. - М.: Физматгиз, 1961. - 932 с.

10. Бари Н.К. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций/ Н.К. Бари, С.Б. Стечкин // Тр. Моск. мат. о-ва. - 1956. - Т. 5. - С. 485 - 522.

11. Бахвалов Н.С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестник МГУ. - 1959. - N 4. - С. 3 - 18.

12. Бахвалов Н.С. Оценка в среднем остаточного члена квадратурных формул// Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1961. - Т. 1. - N 1. - С. 64 - 77.

13. Бахвалов Н.С. Об оптимальных оценках скорости сходимости квадратурных процессов и методов интегрирования типа Монте-Карло на

классах функций // Численные решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. - М.: Наука, 1964. - С. 5 - 63.

14. Бахвалов Н.С. О свойствах оптимальных методов решения задач математической физики // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1970. - Т. 10. - N 3. - С. 555 - 568.

15. Бахвалов Н.С. О оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1971. - Т. 11. - N 4. - С. 1014 - 1018.

16. Бахвалов Н.С. Численные методы/ Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. - М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. -
632 с.

17. Бернштейн С.Н. О наилучшем приближении функций нескольких переменных посредством многочленов или тригонометрических сумм// Собр. соч.- Т. 2. М.: Издательство А.Н. СССР. 1954.-
С. 540 - 545.

18. Белоцерковский С.М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа.- М.: Наука, 1965.- 244 с.

19. Белоцерковский С.М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях/ С.М. Белоцерковский, И.К. Лифанов. - М.: Наука, 1985. - 256 с.

20. Бенерджи П. Метод граничных элементов в прикладных задачах/ П. Бенерджи, Р. Батерфилд.- М.: Мир. 1984. -494 с.

21. Бисплингхофф Р. Аэроупругость/ Р. Бисплингхофф, Х. Эшли, Р. Халфмен.- М.: Издательство иностранной литературы. 1958. -
283 с.

22. Бойков И.В. Об оптимальных алгоритмах вычисления кратных сингулярных интегралов // Доклады АН СССР. - 1974. - Т. 219. - N 1. - С. 15 - 18.

23. Бойков И.В. Приближенное решение особых интегральных уравнений // Доклады АН СССР. - 1975. - Т. 224. - N 6. - С. 1241 - 1244.

24. Бойков И.В. О вычислении сингулярных интегралов, встречающихся в задачах гравиметрии // Методы обработки гравиметрической информации.- М.: Ин-т физики Земли АН СССР. - 1978. -
С. 71 - 90.

25. Бойков И.В. Об оптимальных алгоритмах вычисления одномерных и многомерных сингуляных интегралов // Методы измерений и обработка наблюдений в морской гравиметрии. - М.: Ин-т физики Земли АН СССР. - 1980. - С. 125 - 155.

26. Бойков И.В. Оптимальные методы приближенного вычисления интегралов и приближенное решение интегральных уравнений. - Пенза: Пенз. политехн. ин-т, 1981. - 106 с.

27. Бойков И.В. Асимптотически оптимальные алгоритмы вычисления сингулярных интегралов // Применение вычислительных методов в научно-технических исследованиях: Межвуз. сб. науч. тр. - Пенза: Пенз. политехн. ин-т, 1982. - Вып. 4. - С. 3 - 10.

28. Бойков И.В. Асимптотически оптимальные алгоритмы вычисления сингулярных интегралов // Оптимальные методы вычислений и их применение: Межвуз. сб. науч. тр. - Пенза: Пенз. политехн. ин-т, 1983. - Вып. 5. - С. 3 - 16.

29. Бойков И.В. Оптимальные по точности алгоритмы приближенного вычисления сингулярных интегралов. - Саратов: Изд-во Сарат. гос. ун-та, 1983. - 210 с.

30. Бойков И.В. Оптимальные кубатурные формулы вычисления многомерных интегралов на классе $Q_{r\gamma}(\Omega, M)$ // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1990. - Т. 29. - N 8. - С. 1123 - 1132.

31. Бойков И.В. Асимптотически оптимальные кубатурные формулы вычисления многомерных сингулярных интегралов
// Тр. Ин-та вычислит. мат. АН Груз. ССР. - 1990. - Т. 19. - N 1. - С. 26 - 42.

32. Бойков И.В. О пассивных и адаптивных алгоритмах вычисления сингулярных интегралов // Оптимальные методы вычислений и их применение к обработке информации: Межвуз. сб. науч. тр. - Пенза: Пенз. политехн. ин-т, 1992. - Вып. 11. - С. 3 - 44.

33. Бойков И.В. Адаптивные алгоритмы вычисления сингулярных интегралов // Дифференциальные уравнения. - 1993. - Т. 29. - N 9. - С. 1585 - 1595.

34. Бойков И.В. О пассивных и адаптивных алгоритмах вычисления сингулярных интегралов // Кубатурные формулы и их применения.- Красноярск: Изд-во КГТУ, 1994. - С. 3 - 12.

35. Бойков И.В. Пассивные и адаптивные алгоритмы приближенного вычисления сингулярных интегралов: Ч. 1.- Пенза: Изд-во Пенз. ГТУ, 1995. - 214 с.

36. Бойков И.В. Пассивные и адаптивные алгоритмы приближенного вычисления сингулярных интегралов: Ч. 2.- Пенза: Изд-во Пенз ГТУ, 1995. - 128 с.

37. Бойков И.В. Оптимальные методы вычисления полисингулярных интегралов и решение полисингулярных интегральных уравнений// Труды Средневолжского математического общества.- 2003. - Т. 5, N 1.- С. 109-118.

38. Бойков И.В. Оптимальные методы вычисления полисингулярных интегралов// Кубатурные формулы и их приложения: Материалы VII Международного семинара-совещания. - Красноярск. - 2003. - С. 10-26.

39. Бойков И.В. Оптимальные методы представления потенциальных полей/ И.В. Бойков, А.И. Бойкова // Известия РАН. Физика Земли. - 2003. - N 4. - С. 68-76.

40. Бойков И.В. Приближенные методы вычисления интегралов Адамара и решения гиперсингулярных интегральных уравнений.
И.В. Бойков, Н.Ф. Добрынина, Л.Н. Домнин.- Пенза: Изд-во Пенз. ГТУ, 1996. - 188 с.

41. Бойков И.В. Оптимальные квадратурные формулы для вычисления интеграла Пуассона и интеграла типа Коши/ И.В. Бойков, Т.И. Жукова// Оптимальные методы вычислений и их применение к обработке информации: Межвуз. сб. науч. тр. - Пенза: Пенз. политехн. ин-т, 1992. - Вып. 11. - С. 45 - 86.

42. Бойков И.В. Оптимальные методы вычисления сингулярных интегралов на прямой / И.В. Бойков, С.Я. Нагаева// Оптимальные методы вычислений и их применение к обработке информации. Межвуз. сб. науч. тр. Пенза: Изд-во Пенз ГТУ, 1996. - Вып. 12. -
С. 46 - 67.

43. Бойков И.В. Оптимальные кубатурные формулы вычисления многомерных интегралов в смысле Адамара/ И.В. Бойков, С.Я. Нагаева // Вопросы математического анализа: Сб. науч. ст. - Красноярск: Изд-во Краснояр. гос. техн. уни-та, 1999. - Вып. 3 - С. 30 - 47.

44. Бойков И.В. Применение квадратурных формул Гаусса к приближенному вычислению сингулярных интегралов/ И.В. Бойков,

С.Я. Нагаева //Труды 9 Международного симпозиума Методы дискретных особенностей в задачах математической физики (МДОЗМФ 2000), посвященного 80 летию со дня рождения профессора С.М. Белоцерковского. Орел. 29 мая - 2 июня 2000. - Орел 2000. С. 86 - 89.

45. Бойков И.В. Оптимальные по порядку алгоритмы вычисления сингулярных интегралов/ И.В. Бойков, С.Я. Нагаева // Вопросы математического анализа.- Красноярск: Изд-во КГТУ, 2001. -
С. 13 - 22.

46. Бойков И.В. Приближенное вычисление многомерных сингулярных интегралов квадратурными формулами метода дискретных вихрей/ И.В. Бойков, М.Г. Окунь // Метод дискретных особенностей в задачах математической физики. - Харьков, 1981. - С. 21 - 23.

47. Бойков И.В. Асимптотически оптимальные алгоритмы вычисления интегралов Пуассона, Шварца и типа Коши / И.В. Бойков, Т.И. Полякова // Оптимальные методы вычислений и их применение к обработке информации: Межвуз. сб. науч. тр.- Пенза: Изд-во Пенз ГТУ, 1996.- Вып. 12. - С. 17 - 46.

48. Бойков И.В. Об оптимальных квадратурных формулах для вычисления сингулярных интегралов / И.В. Бойков, А.К. Руденко // Применение вычислительных методов в научно-технических исследованиях: Межвуз. сб. науч. тр. - Пенза: Пенз. политехн. ин-т, 1979. - Вып. 1. - С. 21 - 30.

49. Бойков И.В. О некоторых оптимальных методах вычисления многомерных интегралов/ И.В. Бойков, А.К. Руденко // Применение вычислительных методов в научно-технических исследованиях: Межвуз. сб. науч. тр. - Пенза: Пенз. политехн. ин-т, 1980. - Вып. 2. -
С. 19 - 28.

50. Бойкова А.И. Об одном классе интерполяционных полиномов// Оптимальные методы вычислений и их применение. Пенза: Изд-во Пенз. ГТУ, 1996.- С. 141 - 148.

51. Бойкова А.И. Об одном приближенном методе вычисления трансформаций потенциальных полей// Известия РАН. Физика Земли. 2004, N 1.- С. 58 - 69.

52. Боянов Б.Д. Наилучшие методы интерполирования для некоторых классов дифференцируемых функций// Математические
заметки. - 1975. - Т. 17, - N 4. - С. 511 - 524.

53. Бухштаб А.А. Теория чисел. - М: Гос. учебно-пед. изд-во министерства просвещения РСФСР, 1960. - 376 с.

54. Вайникко Г.М. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения / Г.М. Вайникко, И.К. Лифанов, Л.Н. Полтавский - М: Янус-К. 2001. - 508 с.

55. Векуа Н.П. Интегральные уравнения типа Фредгольма с интегралом в смысле Адамара//Тр. Тбилисского математического института АН ГССР. 1939.- Т. 7. - С. 325 - 336.

56. Вентцель Э.С. Метод компенсирующих нагрузок/ Э.С. Вентцель, К.Е. Джан-Темиров, А.М.Трофимов, Е.В. Негольша /.- Харьков: Изд-во Харьковского высшего военно-командного инженерного училища, 1992. - 91 с.

57. Волохин В.А. Приближенное вычисление многомерных сингулярных и гиперсингулярных интегралов // Изв. вузов. Математика. - 1980. - N 10. - С. 63 - 66.

58. Воробьев Н.Н. Аэродинамика несущих поверхностей в установившемся потоке.- Новосибирск: Наука. 1085. 240 с.

59. Габдулхаев Б.Г. Кубатурные формулы для многомерных сингулярных интегралов // Изв. вузов. Математика. - 1975. - N4. -
С. 3 - 13.

60. Габдулхаев Б.Г. Об оптимальных квадратурных формулах для сингулярных интегралов // Изв. вузов. Математика.- 1978. - N3. -
С. 24 - 39.

61. Гайер Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. - М.: Мир, 1986. - 216 с.

62. Гандель Ю.В. Математические вопросы метода дискретных токов/ Ю.В. Гандель, С.В. Еременко, Т.С. Полякова - Харьков: Изд-во Харьковского гос. ун-та, 1992. - Ч. 2. - 145 с.

63. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. - М.: ГИФМЛ, 1963. - 639 с.

64. Гельфанд И.М. Обобщенные функции и действия над ними/ И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов - Вып. 1. М.: ГИФМЛ. 1958. - 439 с.

65. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей.- М.: Физматгиз. 1959. - 396 с.

66. Гончаров Л.В. Теортя интерполирования и приближения функций. - М.: ГИТТЛ. 1954. - 327 с.

67. Гусейнов А.И. Введение в теорию нелинейных сингулярных инте-

гральных уравнений/ А.И. Гусейнов, Х.Ш. Мухтаров -М.: Наука, 1982. - 414 с.

68. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. - М.: Наука, 1977. - 511 с.

69. Джуракулов Р. Построение весовых кубатурных формул для сингулярных интегралов с помощью сплайн-функции/ Р. Джуракулов, М.И. Исраилов // Изв. вузов. Математика. - 1980. - N9. -
С. 7 - 12.

70. Женсыкбаев А.А. Приближение дифференцируемых функций сплайнами по равномерному разбиению // Математические заметки. - 1973. - Т. 13. - N 6. - С. 807 - 816.

71. Женсыкбаев А.А. Наилучшая квадратурная формула для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. - 1977. - Т. 41. - N 5. - С. 1110 - 1124.

72. Женсыкбаев А.А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи математических наук. - 1981. - Т. 36. - N 4 - С. 107 - 159.

73. Захарова Ю.Ф. Оптимальные весовые квадратурные формулы на числовой оси: Тр. VI междунар. семинара-совещания "Кубатурные формулы и их приложения".- Уфа, 2001.- С. 58 - 62.

74. Захарова Ю.Ф. Оптимальные весовые квадратурные формулы на числовой оси// Вопросы математического анализа.- Вып. 5.- Красноярск, 2002. - С. 18 - 35.

75. Захарова Ю.Ф. Приближенные методы вычисления многомерных сингулярных интегралов с фиксированной особенностью на числовой оси: Тр. междунар. конф. по вычислительной матем.- Новосибирск, 2002. - Том 1. - С. 182 - 188.

76. Захарова Ю.Ф. Приближенное вычисление регулярных и сингулярных интегралов// Тр. Средневолжского матем. об-ва, 2003. -
Т. 5. - N 1.- С. 292 - 300.

77. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. - М.: Мир, 1965. - Т. 1. - 615 с.

78. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. - М.: Мир, 1965. - Т. 2. - 537 с.

79. Ефимов А.В. Приближение сопряженных функций суммами Фейера // Успехи математических наук. - 1959. - Т. 14. - N 1. -
С. 183 - 188.

80. Ефимов В.А. О приближении сопряженных функций сопряженными тригонометрическими суммами/ В.А. Ефимов, В.А. Филимонова // Математические заметки. - 1976. - Т. 20. - Вып. 3. -
С. 425 - 432.

81. Иванов В.В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. - Киев: Наук. думка, 1968. - 287 с.

82. Иванов В.В. Об оптимальных алгоритмах численного решения сингулярных интегральных уравнений // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. - М.: Наука, 1972. - С. 209 - 219.

83. Иоссель Ю.Я. Расчет электрической емкости./ Ю.Я. Иоссель, Э.С. Кочанов, М.Г. Струнский - Л.: Энергоиздат. 1981 - 288 с.

84. Исмагилов Р.С. Поперечники компактов в линейных нормированных пространствах // Геометрия линейных пространств и теория операторов. - Ярославль: Яросл. гос. ун-т, 1977. - С. 75 - 113.

85. Исмагилов Р.С. О поперечниках класса гладких функций в пространстве L/ Р.С. Исмагилов, Х. Насырова // Математические заметки.- 1977. - Т. 22. - N 5. - С. 672 - 679.

86. Исраилов М.И. Построение квадратурных формул для весовых сингулярных интегралов на основе кубического сплайна Рябенького// Узбекский математический журнал.- 2000. - N 2.- С. 35 - 45.

87. Исраилов М.И. Квадратурные и кубатурные формулы для сингулярных интегралов с ядром Гильберта на классе функций $\frac{\alpha}{n}$ / М.И. Исраилов, Т.С. Максудов // Вопросы вычислительной и прикладной математики. - Ташкент: Ин-т кибернетики с ВЦ АН УзССР. - 1971. - Вып. 28. - С. 31 - 45.

88. Исраилов М.И. Кубатурные формулы для сингулярных интегралов с ядром Гильберта на классе функций $\frac{\alpha}{n}$ / М.И. Исраилов, Т.С. Максудов //Доклады АН УзССР. - 1974. - N 8. - С. 10 - 12.

89. Корнейчук А.А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов // Численные методы решения дифференциальных и интеграль-

ных уравнений и квадратурные формулы. - М.: Наука, 1964. - С. 64 - 74.

90. Корнейчук Н.П. Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных // Математические заметки. - 1968. - Т. 3. - N 5. - С. 565 - 576.

91. Корнейчук Н.П. О новых результатах по экстремальным задачам теории квадратур. Добавление к кн.: Никольский С.М. Квадратурные формулы. - М.: Наука, 1974. - С. 136 - 223.

92. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения.-М.: Наука, 1976. - 320 с.

93. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения.- М.: Наука, 1984. - 352 с.

94. Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. - М.: Физматгиз, 1964. - 222 с.

95. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. - М.: Наука, 1967. - 498 с.

96. Лаврентьев М.А. О построении потока, обтекающего дугу заданной формы // Тр. ЦАГИ. - 1932. - Т. 118. - С. 3 - 56.

97. Лебедев В.И. О вычислении интегралов в смысле главного значения, весов и узлов квадратурных формул Гаусса / В.И. Лебедев, О.В. Бабурин // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1965. - Т. 5. - N 3. - С. 454 - 462.

98. Линьков А.М. Гиперсингулярные интегралы в плоских задачах теории упругости А.М. Линьков, С.Г. Могилевская // ПММ.- 1980. - Т. 54. - N 1. - С. 116 - 122.

99. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент - М.: ТОО "Янус", 1995. - 520 с.

100. Лифанов И.К. Численное решение сингулярных интегральных уравнений Гильберта с сильной особенностью// Оптимальные методы вычислений и их применение Межвуз. сб. науч. тр. Пенза: ППИ. 1985.- Вып. 7. - С. 38 - 55.

101. Люстерник Л.А. Математический анализ. Вычисление элементарных функций . Л.А. Люстерник, О.А. Червоненкис, А.Д. Янпольский // М.: Физматгиз. 1963. - 247 с.

102. Лушпай Н.Е. Оптимальные квадратурные формулы для классов функций с интегрируемой в L r-й производной // Analysis

Mathematica. - 1979. - N 5. - С. 67 - 88.

103. Маковоз Ю.И. Об оценке погрешности квадратурной формулы для сингулярного интеграла / Ю.И. Маковоз, М.А. Шешко // Изв. АН БССР. - Сер. физ.-мат. наук. - 1977. - N 6. - С. 36 - 41.

104. Максудов Т.С. О приближенном решении многомерных сингулярных интегральных уравнений // Доклады АН УзССР. - 1977. - N 2. - С. 15 - 16.

105. Маунг Чжо Ньюн Оптимальные кубатурные формулы на классах $D_2^{1,C}$ и D_l^{1,l_1} / Маунг Чжо Ньюн, И.Ф. Шарыгин // Вопросы вычислительной и прикладной математики. - Ташкент: Ин-т кибернетики с ВЦ АН УзССР. - 1971. - N 5. - С. 22 - 27.

106. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. - М.: Физматгиз, 1962. - 254 с.

107. Моторный В.П. О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Серия математическая. - 1974. -
N 3. - С. 583 - 614.

108. Мусаев Б.И. Квадратурные формулы для особого интеграла по отрезку действительной прямой // Изв. вузов. Математика. - 1977. - N 8. - С. 56 - 67.

109. Мусаев Б.И. Конструктивные методы в теории сингулярных интегральных уравнений // Дис. д-ра физ.-мат. наук.- Тбилиси: ТГУ. - 1988. - 339 с.

110. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966. - 707 с.

111. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968. - 612 с.

112. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. - М.; Л.: ГИФМЛ, 1949. - 688 с.

113. Никольский С.М. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами// Успехи математических наук. 1950. - Т. 5. Вып. 2 (36). С. 165-177.

114. Никольский С.М. Квадратурные формулы // Изв. АН СССР. Серия математическая. - 1952. - Т. 16. - С. 181 - 196.

115. Никольский С.М. Приближение функций многоих переменных и теоремы вложения. -М.: Наука, 1977. - 456 с.

116. Никольский С.М. Квадратурные формулы.-М.: Наука, 1979. - 254 с.

117. Окунь М.Г. Оптимальные квадратурные формулы для вычисления интегралов с фиксированным весом // Оптимальные методы вычислений и их применение: Межвуз. сб. науч. тр. - Пенза: Пенз. политехн. ин-т, 1985. - Вып. 7. - С. 45 - 59.

118. Окунь М.Г. Асимптотически оптимальные алгоритмы вычисления интегралов с весом// Оптимальные методы вычислений и их применение: Межвуз. сб. науч. тр. - Пенза: Пенз. политехн. ин-т, 1987. - Вып. 8. - С. 51 - 66.

119. Окунь М.Г. Построение асимптотически оптимальных квадратурых формул с помощью вариационного исчисления // Оптимальные методы вычислений и их применение к обработке информации: Межвуз. сб. науч. тр. - Пенза: Пенз. политехн. ин-т, 1990. - Вып. 9. - С. 47 - 49.

120. Полиа Г. Изопериметрические неравенства в математической физике/ Г. Полиа, Г. Сеге- М.: ГИФМЛ. 1962. 336 с.

121. Полиа Г. Задачи и теоремы из анализа/ Г. Полиа, Г. Сеге- Часть 1. М.: Наука. 1978. 391 с.

122. Половинкин В.И. Некоторые вопросы теории весовых кубатурных формул // Сибирский математический журнал. - 1971. - N 1. - С. 177 - 196.

123. Половинкин В.И. Последовательности квадратурных формул с пограничным слоем // Тр. семинара С.Л. Соболева. -Новосибирск: Ин-т мат. АН СССР. - 1977. - N 1. - С. 149 - 158.

124. Половинкин В.И. Асимптотически наилучшие последовательности кубатурных формул // Сибирский математический журнал.-1975.- Т. 16. - N 6. - С. 1255 - 1262.

125. Половинкин В.И. Асимптотически наилучшие весовые квадратурные формулы: Статья деп. в ВИНИТИ. Рег.N7928. - 1984. - 24 с.

126. Прудников А.Н. Интегралы и ряды/ А.Н. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев- М.: Наука. 1981. - 800 с.

127. Пыхтеев Г.Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши. - Новосибирск.: Наука, Сиб. отд-ние, 1980. - 121 с.

128. Пыхтеев Г.Н. Приближенные методы вычисления интегралов типа Коши специального вида. - Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1982. -

127 с.

129. Пыхтеев Г.Н. Полилогарифмы. Их свойства и методы вычисления/ Г.Н. Пыхтеев, И.Н. Мелешко - Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1976. - 105 с.

130. Салаев В.В. Квадратурная формула для сингулярного интеграла и дискретный сингулярный оператор по замкнутой К-кривой/ В.В. Салаев, Р.И. Якуб-Заде: Статья деп. в ВИНИТИ. Рег. N 6459. - 1973. - 50 с.

131. Саникидзе Д.Г. Об аппроксимации сингулярных интегралов Коши и их предельных значений на концах линии интегрирования // Математические заметки. - 1974. - Т. 15. - N 4. - С. 533 - 542.

132. Саникидзе Д.Г. О равномерной оценке приближения сингулярных интегралов с чебышевской весовой функцией суммами интерполяционного типа // Сообщения АН Груз. ССР. - 1974. - Т. 75. - N 1. - С. 53 - 55.

133. Саникидзе Д.Г. Вычислительные процессы для сингулярных интегралов с ядром Коши и их некоторые приложения // Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. - М.: МФТИ, 1986. - 390 с.

134. Саникидзе Д.Г. К оценке погрешности интерполяционных квадратурных формул для сингулярных интегралов / Д.Г. Саникидзе, Д. Зангуридзе // Applied Mathematics and Informatics. 1996 - V. 1. - N 1. - P. 148 - 152.

135. Смоляк С.А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них //Дис. ... канд. физ.-мат. наук. - М.: МГУ, 1965. - 140 с.

136. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул.- М.: Наука, 1974. - 808 с.

137. Степанец А.И. Методы теории приближений. Часть 1.- Киев: Труды института математики НАН Украины. Т. 40. - 2002. - 427 с.

138. Степанец А.И. Методы теории приближений. Часть 2.- Киев: Труды института математики НАН Украины. 2002. - Т. 40. - 468 с.

139. Стечкин С.Б. Наилучшее приближений линейных операторов// Математические заметки. 1967. - Т. 1. - N 2. - С. 137-148.

140. Страхов В.Н. К вопросу о построении наилучших вычислительных схем для трансформации потенциальных полей // Изв. АН СССР. Геофизика. - 1963. - N 12. - С. 1780 - 1797.

141. Страхов В.Н. К вопросу о построении наилучших вычислительных схем для трансформации потенциальных полей //Изв. АН СССР. Физика Земли. - 1964. - N 1 - 2. - С. 55 - 81 (N1). - С. 213 - 227 (N2).

142. Страхов В.Н. Методы решения прямых задач гравиметрии, используемые при моделировании глобальных и региональных гравитационных аномалий / В.Н. Страхов, Е.В. Романюк, Н.К. Фролова // Новые методы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. - М.: АН СССР. Ин-т физики Земли, 1989. - С. 118 - 236.

143. Сухарев А.Г. Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа. -М.: Наука, 1989. - 304 с.

144. Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной. - М.: Наука, 1986. - 111 с.

145. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики // Под ред. К.И.Бабенко. - М.: Наука, 1979. - 196 с.

146. Тиман А.Ф. Теория приближений функций действительного переменного.- М.: Физматгиз, 1960.- 624 с.

147. Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория приближений// Успехи математических наук, 1960. - Т. 15. - N 13. - С. 81 - 120.

148. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. - М.: Наука, 1975. - 304 с.

149. Тихомиров В.М. Теория приближений.- В кн.: Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.- М.: Наука, 1987. - Т. 14. - С. 105-170.

150. Трауб Дж. Общая теория оптимальных алгоритмов/ Дж. Трауб, Х. Вожьняковский - М.: Мир, 1983. - 382 с.

151. Трауб Дж. Информация, неопределенность, сложность / Дж. Трауб, Х. Вожьняковский, Г. Васильковский - М.: Мир, 1988. - 184 с.

152. Фалалеев Л.П. Приближение сопряженных функций суммами Чезара // Математические заметки. - 1980. - Т. 28. - N 3. -
С. 451 - 458.

153. Филимонова В.А. Асимптотические оценки приближения сопряженных функций сопряженными интерполяционными суммами // Применение функционального анализа в теории приближений. - Калинин: Изд-во Калининского гос. ун-та, 1979. - С. 146 - 155.

154. Филипповский В.Г. Приближение сопряженных функций полиномами Рогозинского. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. - 28 с.

155. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.- Т. 2.- М.: Физматгиз, 1959.- 808 с.

156. Чикин Л.А. Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярные интегральные уравнения.- Уч. зап. Казанского гос. ун-та. 1953. - Т. 113. - N 10. - С. 53 - 105.

157. Шешко М.А. О сходимости квадратурного процесса для сингулярного интеграла // Изв. вузов. Математика. - 1976. - N 2. - С. 108 - 118.

158. Шешко М.А. О сходимости кубатурных процессов для двумерного сингулярного интеграла // Доклады АН БССР. - 1979. - Т. 23. - N 4. - С. 293 - 296.

159. Эшли Х. Аэродинамика крыльев и корпусов летательных аппаратов / Х. Эшли, М. Лэндал - М.: Машиностроение, 1969. 129 с.

160. Acum W.E.A. Theory of Lifting Surfaces Oscillating at General Frequencies in a Subsonic Stream // Repts. and Mem. - ARC. 1959. - N 3557. - P. 426-463.

161. Atkinson K. The numerical evaluation of the Cauchy transform on simple closed curves // SIAM J. Numer. Anal. - 1972. - V. 9. - N 2. - P. 284 - 299.

162. Bialecki B. A Sine Quadrature Rule for Hadamard Finite-part Integrals // Numer. Math. 1990.- V. 57. - P. 263 - 269.

163. Boikov I.V. The Optimal Algorithms of Calculation of Singular Integrals, Decision of Singular Integral Equations and Its Applications// 15 th Imacs World Congress on Scientific Computation, Modelling and Applied Mathematics. Berlin, 1997. Volume 1. Computational Mathematics. Wissenschaft Technik Verlag, Berlin. 1997. P. 587 - 592.

164. Boikov I.V., Numerical methods of computation of singular and hypersingular integrals// International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2001. - V. 28. - N 3. - P. 127 - 179.

165. Boikov I.V. Optimal with Respect to Accuracy Algorithms for Calculation of Multidimensional Weakly Singular Integrals and Applications to Calculation of Capacitances of Conductors of Arbitrary Shapes/ I.V. Boikov, A.G. Ramm //Acta Applicandae Mathematicae.- 2003. - V. 79. - N 3. - P. 281 - 326.

166. Boikova A. Methods for approximate calculation of the Hadamard integrals and solution of integral equations with Hadamard integrals // C. Constanda, J. Saranen and S. Siekkala (editors) Integral methods in science and engineering. Volume two: approximate methods. Addison Wesley Longman Limited, 1997. - P. 59 - 63.

167. Boikova A.I. An Oder One Approximate Method of Solution of Differential and Integral Equations// B. Bertram, C. Constanda, S. Struchers (editors) Integral methods in science and engineering. Research Notes in Mathematics, v. 418, CRC PRESS, London, 2000. - P. 73 - 78

168. Brab H. Quadraturverfahren Vandenboeck, Ruprecht. Gottingen. 1977.- 320 p.

169. Cesari L. Sulle cerie li Fourier della fonzioni Lipshtziane di piu variable // Annali di Scuola Normale Superiore di Pisa. - Sci. fis. e mat. - 1938. - V. 7. - P. 279 - 295.

170. Chawla M.M. Quadrature Formulas for Cauchy Principal Value Integrals/ M.M. Chawla, N. Jayarajan Computing . - 1975. - 15. -
P. 347 - 355.

171. Chawla M.M. Estimating Errors of Numerical Approximation for Periodic Analytic Functions / M.M. Chawla, R. Kress // Computing. - 1977. - V. 18. - P. 241 - 248.

172. Chawla M.M. Numerical Evaluation of Integrals of Periodic Functions With Cauchy and Poisson Type Kernels // Numerische Mathematik / M.M. Chawla, T.R. Ramakrishnan - 1974. - V. 22. - P. 317 - 323.

173. Criscuolo G. Formule Gaussiane per il calcolo di integrali a valor principale secondo Cauchy e loro convergenza / G. Criscuolo, G. Mastroianni Calcolo , 1985. V. 22. - P. 391-411.

174. Criscuolo G. On the convergence of an interpolatory product rule for evaluation Cauchy principal value integrals / G. Criscuolo, G. Mastroianni// Math. Comp. 1987. - V. 48. - P. 725 - 735.

175. Criscuolo G. On the Uniform Convergence of Gaussian Quadrature Rules for Cauchy Principal Value Integrals/ G. Criscuolo, G. Mastroianni // Numer. Math. 54. 1989. P. 445 - 461.

176. Criscuolo G. On the convergance of product formulas for the numerical evaluation of derivatives of Cauchy principal value integrals / G. Criscuolo, G. Mastroianni // SIAM Journal of Numerical Analysis. 1988. - V. 85. - P. 713 - 727.

177. Dagnino C. On the evaluation of the one-dimensional Cauchy principal value integrals by rules based on cubic spline interpolation / C. Dagnino, E. Santi // Computing, 1990. - V. 43. - P. 267 - 276.

178. Davis P.J. Methods of Numerical Integration / P.J. Davis, Ph. Rabinowitz - Academic Press. Orlando and edition. 1984. - 510 p.

179. Diethelm K. Gaussian quadrature formulae of the third kind for Cauchy principal value integrals: Basic propertics and error estimates // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1995. - V. 65. - P. 97 - 114.

180. Diethelm K. Error Bounds for Compound Quadratures for Hadamard-Type Finite Part Integrals // In the book G. Alefeld, J. Hereberger (editors) "Numerical Methods and Error Bounds"Academia-Verlag. Berlin. 1996.- P. 17 - 28.

181. Diethelm K. Generalized compound quadrature formulae for finite-part integrals// IMA Journal of Numerical Analysis. 1997. - V. 17. - P. 479-493.

182. Diethelm K. Peano kernels and bounds for the error constants of Gaussian and related quadrature rules for Cauchy principal value integrals// Numer. Math., 1996. - V. 73. - P. 53 - 63.

183. Diethelm K. Error estimates for a quadrature rule for Cauchy principal value integrals// Proc. Sympos. Appl. Math., 1994. - V. 48. - P. 287 - 291.

184. Diethelm K. Uniform convergence of optimal order quadrature rules for Cauchy principal value integrals// J. Comput. Appl. Math., 1994. - V. 56. - P. 321 - 329.

185. Diethelm K. Asymptotical sharp error bounds for a quadrature rule for Cauchy principal value integrals based on piecewise linear interpolation// Approx. Theory Appl. (N.S.), 1995. - V. 11. - P. 78 - 89.

186. Elliot D. On the Convergence of Hunter's Quadrature Rules for Cauchy Principal Value 1979.

187. Elliott D. Gauss Type Quadrature Rules for Cauchy Principal Value Integrals / D. Elliott D, D.F. Paget // Math.Comput. - 1979. - V. 33.- N 145. - P. 301 - 309.

188. Gaier D. Konstruktive Methoden der Konformen Abbildung. - Berlin-Heidelberd: Springer, 1964. - 294 p.

189. Gautschi W. A Survey of Gauss-Christoffel Quadrature Formulae. In: Butzer, P.L., Feher, (eds.): Christoffel: The Influence of his Work on

Mathematics and the Physical Sciences. Birkhauser Verlag, Basel,
P. 72 - 147.

190. Girshovich J. Extremal properties of Euler-Maclaurin and Gregory quadrature formulas // Изв. АН ЭССР. - Физика, математика. - 1978. - Т. 27. - N 3. - С. 259 - 265.

191. Gori Nicolo-Amati L. On the Convergence of Turan Type Rules for Cauchy Principal Value Integrals / Nicolo-Amati L. Gori, E. Santi // Calcolo. -1991. -V. 28. P. 21 - 35.

192. Gutknecht H.M. Fast Algorithms for the Conjugate Periodic Function // Computing. - 1979. - N 22. - P. 79 - 91.

193. Hunter D. B. Some Gauss-type formulae for the evaluation of Cauchy principal value integrals // Numer. math. 1972. - V. 19.
P. 419 - 424.

194. Hunter D.B. The numerical evaluation of Cauchy principal values of integrals by Rombery integration // Numerische Mathematic. - 1973. - V. 21. - N 3. - P. 185 - 192.

195. Ioakimidis N.I. Further Convergence Results for Two Quadrature Rules for Cauchy Type Principal Value Integrals// Apl. Mat. 1982. - V. 27. - P. 457 - 466.

196. Ioakimidis N.I. On the Uniform Convergence of Gaussian Quadrature Rules for Cauchy Principal Value Integrals and Their Derivatives// Math. Comp. 1985. - V. 44. - P. 191 - 198.

197. Ioakimidis N.I. Application of finite-part integrals to the singular integral equations of creck problems in plane and three-dimensional elasticity // Acta Mechanics. 1982. - V. 45. - P. 31 - 47.

198. Ioakimidis N.I. On the validity of the singular integral equations of crack problem at the crack tipe // Acta Mechanics. - 1989. - V. 48. - P. 185 - 191.

199. Jinyuan Du. Quasi-Gaussian Quadrature formulas // Journal of Ningxia University (Natural Science Edition). 1998. - V. 19. - N 1. - P. 22 - 24.

200. Jinyuan Du. Some quadrature formulae for singular integrals // Acta Mathematical Sciential. 1984. - V. 4 - N 2. - P. 233 - 242.

201. Kaya A.C. On the solution of integral equations with strongly singular integrals / A.C. Kaya, E. Erdogan // Quatery of applied mathematics. - 1987. - V. 45. - N 1. - P. 105 - 122.

202. Linkov A.M. Complex hypersingular integrals and integral

equations in plane elasticity / A.M. Linkov, S.C. Mogilevskaja // Acta Mechanics. - 1994. - V. 105. - P. 189 - 205.

203. Mason J.C. A Chebyshev polynomial method for line integral with singularities / J.C. Mason, E. Venturino// Advances in Computational Mathematics, 1999. -V. 10. - 187 - 208 p.

204. Monegato G. The Numerical Evaluation of One-Dimensional Cauchy Principal Value Integrals// Computing, 1982. - V. 20. - P. 337 - 354.

205. Paget D.F. The numerical evalution of Hadamard finite-part integrals // Numer. Math. - 1981. - V. 36. - P. 447 - 453.

206. Rabinowitz P. Gauss-Kronrod Integration Rules for Caychy Principal Value Integrals// Math. Comp. 1983. - V. 41. - P. 63 - 78;

207. Rabinowitz Ph. Uniform convergence of Cauchy principal value integrals of interpolating splines // Israel Mathematical Conference Proceedings. 1991. - V. 4. - P. 225 - 231.

208. Rabinowitz P. Optimal quasi-interpolatory splines for numerical integration // Annals of Numerical Mathematics. 1995. - V. 2. - P. 145 - 157.

209. Rabinowitz Ph. On the uniform convergence on Cauchy principal values of integrals rules based on quasi-interpolating splines / Ph. Rabinowitz, E. Santi //Journal of Computational and Applied Mathematics. - 1996. - V. 71. - P. 1 - 14.

210. Ramm A.G. Iterative Methods for Calculating Static Fields and Wave Scattering by Small Bodies.- New York: Springer - Verlag- 1982. - 124 p.

211. Sanikidze D. On an error estimate for interpolation quadrature formulas for singular integrals// Appl. Math. Inform. 1996. - N 1. - P. 148-152

212. Santi E. Uniform convergence results for certain two-dimensional Cauchy principal value integrals// Portugaliae Mathematica:- vol. 57. Fasc. 2-2000. -V. 57. - P. 191 - 201.

213. Sard A. Integral representations of remarkable // Duke Math. J., 1948. - V. 15. - P. 333 - 345.

214. Stein P. On a theorem of M.Riesz // Journal the London Mathematical Society. - 1933. - V. 8. - P. 242 - 247.

215. Stenger F. Upper and Lower estimates of the rate of convergence of approximations in H_p // Bull. of the American Math. Society. - 1978. - V. 84. - N 1. - P. 145 - 148.

216. Stenger F. Numerical Methods based on Whittaker cardinal, or sinc, functions // SIAM REV. - 1981. - V. 23. - N 2. - P. 165 - 224.

217. Stole H.W. On the Numerical Integration of Certain Singular Integrals/ H.W. Stole, R. Straub // Computing 1992. - V. 48. -
P. 177 - 189.

218. Theocaris P.S. On the Numerical Evaluation of Two-and Three-Dimensional Cauchy Principal-Value integrals / Theocaris P.S. Kazantzakis J.G. // Acta Mechanica. - 1981. - N 39. - P. 105 - 115.

219. Winer K. Uber die Losing nichtlineearer Integralgleichungen mit Hadamard-Integralen // Math. Nachr. - 1968. - V. 36. - N 5-6. -
J. 289 - 309.

220. Zaderej P.V. On the approximation of conjugate functions from Holder classes by Fejer means / P.V. Zaderej, A.I. Stepanets // Analysis Mathematica. - 1979. - V. 5 - N 2. - P. 167 - 178.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ. 3
ГЛАВА 1
ВВЕДЕНИЕ. 5
1. Постановка задачи оптимизации. 5
2. Классы функций. 12
2.1. Классы W^rH_α, W^r_p. 12
2.2. Классы $W^{rs}H_{\omega_1\omega_2}$, $W^{rs}H_\omega$. 14
2.3. Классы D^α_s, H^α_s, E^α_s. 515
2.4. Некоторые другие классы. 16
3. Вспомогательные утверждения. 20
3.1. Полиномы наилучшего приближения. 20
3.2. Интерполяционные полиномы. 24
3.3. Элементы теории сплайнов. 27
3.4. Некоторые факты из теории квадратурных формул. 31
3.5. Некоторые обозначения. 42
4. Обзор приближенных методов вычисления сингулярных интегралов. 43
ГЛАВА 2
СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ С ФИКСИРОВАННОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ. 51
1. Алгоритмы вычисления на классах W^rH_α. 51
1.1. Асимптотически оптимальные пассивные алгоритмы. 51
1.1.1. Формулировки теорем. 51
1.1.2. Доказательства теорем. 53
1.2. Оптимальные по порядку пассивные алгоритмы. 59
1.2.1. Формулировки теорем. 59
1.2.2. Доказательства теорем. 62
1.3. Устойчивость пассивных алгоритмов. 67
1.3.1. Формулировки теорем. 67
1.3.2. Доказательства теорем. 68
1.4. Математическое ожидание величины погрешности квадратурных формул. 71
2. Алгоритмы вычисления на классах W^r_p. 72
2.1. Оптимальные пассивные алгоритмы. 72
2.1.1. Формулировки теорем. 72

2.1.2. Доказательства теорем. 73
2.2. Асимптотически оптимальные пассивные алгоритмы. 77
2.2.1. Основные результаты. 77
2.2.2 Доказательства теорем. 79
2.3. Оптимальные по порядку пассивные алгоритмы. 85
2.3.1. Формулировки теорем. 85
2.3.2 Доказательства теорем. 86
3. Асимптотически оптимальные квадратурные формулы с пограничным слоем на классе W^rL_p. 90
4. Гауссовские квадратурные формулы. 84
5. Оптимальные методы вычисления сингулярных интегралов на бесконечной прямой. 98
ГЛАВА 3
СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ С ЯДРАМИ КОШИ И ГИЛЬБЕРТА. 110
1. Класс W^rH_α. 110
1.1. Асимптотически оптимальные пассивные алгоритмы на классе $H_\alpha(1)$. 110
1.1.1. Формулировки теорем. 110
1.1.2. Доказательства теорем. 113
1.2. Асимптотически оптимальные пассивные алгоритмы на классе W^rH_α $(r \geq 1)$. 135
1.2.1. Формулировки теорем. 135
1.2.2. Доказательства теорем. 136
1.3. Оптимальные по порядку пассивные алгоритмы. 140
1.3.1. Формулировки теорем. 140
1.3.2. Доказательства теорем. 142
1.4. Устойчивость алгоритмов. 148
1.4.1. Формулировки теорем. 148
1.4.2. Доказательства теорем. 150
1.5. Математическое ожидание величины погрешности квадратурных формул. 154
1.5.1. Формулировки теорем. 154
1.5.2. Доказательства теорем. 155
2. Класс W_p^r. 157
2.1. Асимптотически оптимальные пассивные алгоритмы. 157

2.1.1. Формулировки теорем. 157
2.1.2. Доказательства теорем. 160
2.2. Оптимальные по порядку пассивные алгоритмы. 166
2.2.1. Формулировки теорем. 167
2.2.2. Доказательства теорем. 169
3. Оптимальная регуляризация сингулярных интегралов. 177
4. Интегралы с весами. 179
4.1. Оптимальные по порядку пассивные алгоритмы на классе $W^r H_\alpha$. 179
4.1.1. Формулировки теорем. 179
4.1.2. Доказательства теорем. 181
4.2. Оптимальные по порядку пассивные алгоритмы на классе W_p^r. . . 186
5. Оптимальные методы восстановления сопряженных функций. 189
5.1. Вспомогательные утверждения. 189
5.2. Сингулярные интегралы с ядрами Коши. 192
ГЛАВА 4
МНОГОМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 197
1. Интегралы со степенной особенностью. 197
1.1. Пассивные алгоритмы на классах $W^{r,s}H_{\omega,\omega}$ и $W_\rho^{r,s}$. 197
1.1.1. Формулировки теорем. 198
1.2. Оптимальные методы вычисления интегралов вида $F\varphi$. 200
1.2.1. Формулировки теорем. 201
1.2.2. Доказательства теорем. 205
1.3. Оптимальные методы вычисления интегралов вида Tf. 205
2. Интегралы с переменной сингулярностью. 211
2.1. Асимптотически оптимальные пассивные алгоритмы на классах Гельдера и Зигмунда. 211
2.1.1. Прямоугольные сетки. 211
2.1.1.1. Формулировки теорем. 211
2.1.1.2. Доказательства теорем. 213
2.1.2. Произвольные сетки. 217
2.1.2.1. Формулировки теорем. 217
2.1.2.2. Доказательства теорем. 218
2.2. Асимптотически оптимальные пассивные алгоритмы на классе $\tilde{C}_m^r$. 223
2.2.1. Прямоугольные сетки. 223
2.2.1.1. Формулировки теорем. 223

2.2.1.2. Доказательства теорем. 225
2.3. Оптимальные алгоритмы на классах $H_{\alpha,\alpha}, W^{r,s}$. 228
2.3.1. Классы $H_{\alpha_1\alpha_2}(D), H_i^{\alpha}(i=1,2)$. 228
2.3.1.1. Формулировки теорем. 229
2.3.1.2. Доказательства теорем. 230
2.3.2. Классы $W_p^{r,s}$ и $W_p^{r+\alpha,s+\beta}$. 231
2.3.2.1. Формулировки теорем. 232
2.3.2.2. Доказательства теорем. 233
2.4. Устойчивость пассивных алгоритмов. 236
2.4.1. Формулировки теорем. 236
2.4.2. Доказательства теорем. 239
2.5. Математическое ожидание величины погрешности кубатурных формул. 241
3. Теоретико-числовые методы. 243
3.1. Класс $\tilde{H}_m^{\alpha}$. 244
3.1.1. Формулировки теорем. 244
3.1.2. Доказательства теорем. 245
3.2. Класс D_s^{α}. 248
3.2.1. Формулировки теорем. 248
3.2.2. Доказательства теорем. 249
3.3. Класс E_s^{α} 250
3.3.1. Формулировки теорем. 251
3.3.2. Доказательства теорем. 252
4. Оптимальная регуляризация многомерных сингулярных интегралов. 254
5. Полисингулярные интегралы с ядром Коши. 255
5.1. Формулировки теорем. 255
5.2. Доказательства теорем. 259
6. Многомерные интегралы. 266
6.1. Формулировки теорем. 266
6.2. Доказательства теорем. 269
7. Оптимальные методы восстановления многомерных сопряженных функций. 272
7.1. Гладкость полисингулярных интегралов. 273
7.2. Оптимальные кубатурные формулы вычисления полисингулярных интегралов. 276

7.3. Оптимальные методы восстановления сопряженных функций.... 287
ГЛАВА 5
АДАПТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ. 292
1. Адаптивные алгоритмы вычисления одномерных сингулярных интегралов. 293
2. Адаптивные алгоритмы вычисления многомерных сингулярных интегралов. 297
3. Адаптивные алгоритмы вычисления полисингулярных интегралов. 305
ГЛАВА 6
ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО СЛОЖНОСТИ АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ. 308
1. Оптимальные по сложности алгоритмы вычисления сингулярных интегралов с фиксированной сингулярностью на классе функций Гельдера. 308
2. Оптимальные по сложности алгоритмы вычисления сингулярных интегралов с фиксированной сингулярностью на классе функций $W_p^r(1)$. 317
3. Оптимальные по сложности алгоритмы вычисления сингулярных интегралов с ядром Гильберта. 319
4. Оптимальные по сложности алгоритмы вычисления полисингулярных интегралов. 324
ГЛАВА 7
ПРИМЕНЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЕМКОСТИ ТЕЛ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ. 328
1. Итерационные методы вычисления электрической емкости тел произвольной формы. 328
2. Описание программы. 331
3. Численные примеры 333
4. Заключение. 334
Список литературы 337